بسم الله الرحمن الرحيم

الخميس ١٢ / ٣ / ٢٠١٥

المحاضرة الثانية : هندسة جبرية :

مبرهنة

$K[x_1,\dots,x_n]$ حلقة نوثرية.

يعني:

بفرض I مثالي من $K[x_1,\dots,x_n]$ عندئذٍ:

$$\exists f_1,\dots,f_s \in K[x_1,\dots,x_n]$$

حيث

$$I=\langle f_1,\dots,f_s\rangle$$

ملاحظة: لا يوجد علاقة بين s و n.

تعاريف : تذكرة:

بفرض I مثالي من $K[x_1,\dots,x_n]$ عندئذٍ:

- نقول عن I أنه مثالي أولي اذا حقق الشرط التالي:

$$\forall f,g\in K[x_1,\dots,x_n];\ f\cdot g\in I \Longrightarrow f\in I \quad \text{or} \quad g\in I$$

- نقول عن I أنه مثالي أعظمي اذا حقق ما يلي:

1) I مثالي حقيقي أي:

$$I\neq\{0\} \quad \text{و} \quad I\neq K[x_1,\dots,x_n]$$

2) من أجل J مثالي من $K[x_1,\dots,x_n]$ يحقق أنه $I\subset J\subset K[x_1,\dots,x_n]$ عندئذٍ:

إما $J=I$ أو $K[x_1,\dots,x_n]$.

أولي primary

/ /

- نقول عن I أنه مثالي رئيسي اذا كان مولد بكثير حدود وحيد. مثال: $\langle x^2y+1\rangle$
- بفرض $f\in K[x_1,\dots x_n]$ عندئذ نقول عن f أنه كثير حدود متجانس من الدرجة m اذا كان كل حد من حدوده من الدرجة m، ونقول عن I مثال $x^m+x^{m-2}y^2+y^{m-1}x$
أنه مثالي متجانس اذا كان مولد بكثيرات حدود متجانسة.

مثال: $\langle x^2+xy,\ x^2y^5-yx^6\rangle$

- نعرف جذر المثالي I كما يلي:

$$\sqrt{I}=\{f\in K[x_1,\dots x_n];\ \exists m\in\mathbb{N}^*;\ f^m\in I\}$$

ملاحظة: سألت الدكتورة عن x^2y مثلاً: نعتبره كثير حدود متجانس ويكون المثالي فيه مثالي متجانس أي $I=\langle x^2y\rangle$ هو مثالي متجانس.

- نقول عن I أنه مثالي جذري اذا كان $I=\sqrt{I}$

مثال: بفرض $I=\langle x^3\rangle\subset\mathbb{R}[x]$ عندئذ $\sqrt{I}=\langle x\rangle$

[تذكرة: الحلقة التي جميع مثالياتها رئيسية تدعى حلقة مثاليات رئيسية
مثل $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{R}[x]$]

مبرهنة:

بفرض I مثالي من $K[x_1,\dots x_n]$ عندئذ $\sqrt{I}$ مثالي.

الإثبات:

- لدينا $0\in I$ ومنه $0\in\sqrt{I}$ وضوحاً.
- بفرض $f,g\in\sqrt{I}$ عندئذ يوجد $m,r\in\mathbb{N}^*$ بحيث $f^m,g^r\in I$ ومنه $(f+g)^{m+r}\in I$
ومنه $f+g\in\sqrt{I}$
- بفرض $f\in\sqrt{I}$ و $p\in K[-]$ عندئذ يوجد $m\in\mathbb{N}^*$ بحيث $f^m\in I$.
ومنه $p^m.f^m\in I$ أي $(p.f)^m\in I$ ومنه $\sqrt{I}$ مثالي.

لو قلنا $K[x_1,x_2,\dots x_n]$ فإن n أصغرفية عدد أكبر أو يساوي 2.
ولكنا نريد حالة $n=1$ فنكتب:
$K[x_1,\dots x_n]$

تذكرة
لإثبات J مثالي $0\in J$
$\forall x,y\in J,\ r\in R:$
$x-y\in J$, $r.x\in J$

/ /

برهنة:

ليكن I مثالي من $K[x_1,\dots,x_n]$ عندئذٍ $I \subset \sqrt{I}$

الإثبات:

ليكن $f \in I$ نضع $m=1$ فيكون $f^m = f^1 \in I$ أي $f \in \sqrt{I}$ ومنه $I \subset \sqrt{I}$

مثال: $I = \langle x^3 \rangle \subsetneq \sqrt{I} = \langle x \rangle$

ملاحظة: إن عكس البرهنة السابقة غير صحيح بالضرورة. فلو أخذنا

$$I = \langle x^2+3xy \,,\, y^2+3xy \rangle \subset \mathbb{R}[x,y]$$

عندئذٍ I مثالي متجانس مولد بكثيرات حدود متجانسة من الدرجة الثانية

نلاحظ أن

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$= x(x^2+3xy)+y(y^2+3xy) \in I \Longrightarrow$$

$x+y \in \sqrt{I}$ لكن $x+y \notin I$ لأن $x+y$ كثير حدود متجانس

من مرتبة الأولى لا يمكن أن يكون في I

ملاحظات:

1) كل مثالي أعظمي هو مثالي أولي، إلا أن العكس غير صحيح بالضرورة.

مثال:

$\langle x \rangle \subset \mathbb{R}[x,y]$ مثالي أولي لكنه ليس أعظمي لأن $\langle x \rangle \subsetneq \langle x,y \rangle$

2) كل مثالي أولي هو مثالي جذري إلا أن العكس غير صحيح بالضرورة

$\mathbb{R}[x] \supset I = \langle (x+1)(x+2) \rangle$ جذري لكنه ليس أولي لأن

$(x+1)(x+2) \in I$ حيث $x+1 \notin I$ و $x+2 \notin I$

3) * لنفرض $K[x]$ حلقة كثيرات حدود بمجهول واحد ولنفرض I مثالي من $K[x]$ عندئذ I مثالي رئيسي.

ولنفرض $I = \langle f_1, \dots f_s \rangle$ عندئذ: $I = \langle \gcd(f_1, \dots f_s) \rangle$

مثال: لنفرض $I = \langle x^3, x^2 - x \rangle$ من $\mathbb{R}[x]$ عندئذ حسب الملاحظة السابقة:

$$I = \langle \gcd(x^3, x^2 - x) \rangle = \langle x \rangle$$

(رقم (3) لا تتحقق في حال $n > 1$)

تعريف:

لنفرض $I, J \in K[x_1, \dots x_n]$ مثاليان عندئذٍ نعرف

$$I + J = \{ f + g \in K[x_1, \dots x_n] : f \in I \ \& \ g \in J \}$$

$$I . J = \{ f . g \in K[x_1, \dots x_n] ; f \in I \ \& \ g \in J \}$$

حيث يكون $I + J$ & $I . J$ مثاليان في $K[x_1, \dots x_n]$

أثبت ذلك (وظيفة). 2 _ 1

أيضاً يكون $I . J \subseteq I \cap J$, $I \cup J \subset I + J$ أثبت ذلك (وظيفة) 2_2

حيث $I \cap J$ مثالي.

أما $I \cup J$ ليس بالضرورة مثالي لأن المجموعة $I \cup J$ ليست مغلقة بالنسبة للجمع أوجد مثال (وظيفة) 2_3

انتهت المحاضرة،

حل وظيفة: 2-3،

لتكن الحلقة $\mathbb{R}[x,y]$ ولـ $I = \langle x \rangle$ و $J = \langle y \rangle$ مثاليين فيها.

لنأخذ $f = xy - x \in I \cup J$ حيث $f \in I$ لأن $(x(y-1) \in \langle x \rangle)$

ولنأخذ $g = -xy + y \in I \cup J$ حيث $g \in J$ لأن $(y(1-x) \in \langle y \rangle)$

ولكن $f + g = -x + y \notin I \cup J$

و $-x + y \notin I$ & $-x + y \notin J$

ومنه ليس بالضرورة اجتماع مثاليين هو مثالي.

حل 2-2:

أثبت أنه اذا كان I و J مثاليين: فإن

$I.J \subseteq I \cap J$ و $I \cup J \subseteq I+J$:

1) لنثبت: $I.J \subseteq I \cap J$

$$\forall f \in I.J \Rightarrow f = g_1 g_2 ; \quad g_1 \in I , \quad g_2 \in J$$

$$\left.\begin{array}{l} g_1 \in I, \quad g_2 \in J \subseteq K[x_1, \dots x_n] \xRightarrow{\text{لأن } I \text{ مثالي}} g_1 \cdot g_2 = f \in I \\ g_1 \in I \subset K[x_1, \dots x_n], \quad g_2 \in J \xRightarrow[\text{لأن } J \text{ مثالي}]{} g_1 \cdot g_2 = f \in J \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$f = g_1 \cdot g_2 \in I \cap J \quad \Rightarrow$$

$$I.J \subseteq I \cap J$$

2) لنثبت: $I \cup J \subseteq I+J$

$$\forall f \in I \cup J \; : \; f \in I \text{ أو } f \in J$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{إما} & f \in I \xRightarrow[\text{لأن } J \text{ مثالي}]{\exists 0 \in J} f + 0 \in I + J \Rightarrow f \in I + J \\ \text{أو} & f \in J \xRightarrow[\text{لأن } I \text{ مثالي}]{0 \in I} 0 + f \in I + J \Rightarrow f \in I + J \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow I \cup J \subseteq I + J$$

وهو المطلوب

Rehab

ملاحظة: سيتم انزال تكملة الوظيفة لاحقاً إن شاء الله.