تمرين:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

برهن أن مشتق الدالة f في النقطة $(0,0)$ باتجاه أي متجه $u(a,b)$ موجود وأنه إذا كان $a \neq 0$ فإن

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0,0) = \frac{b^2}{a}$$

اثبت أن f ليست مستمرة وبالتالي غير قابلة للاشتقاق في $(0,0)$

الحل:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+hu) - f(c)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(ha, hb) - f(0,0)}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{h^3 a b^2}{h^2 a^2 + h^4 b^4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a b^2}{a^2 + h^2 b^4} = \frac{b^2}{a}, \quad a \neq 0$$

اثبات أن f ليست مستمرة

$$\{(0,0)\} \xleftarrow[\infty \leftarrow n]{} \left\{\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$$

طريقة ثانية:
حسب التعريف

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \|(x,y) - (0,0)\| < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$$

$$x = \frac{\delta^2}{4}, \quad y = \frac{\delta}{2}$$

$$x^2+y^2=\frac{\delta^4}{16}+\frac{\delta^2}{4}=\frac{\delta^2}{4}\left(\frac{\delta^2}{4}+1\right)<\delta^2$$

$$(\delta<2\sqrt{3})$$

$$f_{xx}\cdot f_{yy}\begin{vmatrix}\dfrac{\delta^2}{4} & \dfrac{\delta^2}{4}\\ \dfrac{\delta^4}{16} & +\dfrac{\delta^4}{16}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\dfrac{\delta^4}{16}}{2\dfrac{\delta^4}{16}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}>0$$

مثال :

$$f:R^2\to R$$

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)=(0,0)\\ (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

1) برهن أن f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من R^2

2) اثبت أن f_x ، f_y ليستا مستمرتين في جوار $(0,0)$

الحل : نلاحظ أنه إذا كان $(x,y)\neq(0,0)$ فإن

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{(x^2+y^2)\,(-2x)}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

إن f_x و f_y موجودتان ومستمرتان لأن: كلاً من f_x و f_y

لأن: مجموع وجداء وتركيب سوف يكون لدينا دوال مستمرة

أما عند $(x,y)=(0,0)$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h^2}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h^2}=0$$

حسب تعريف قابلية الاشتقاق،

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=f_x h+f_y k+\mu\sqrt{h^2+k^2}$$

حيث $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\mu=0$

$$f(h,k)-f(0,0)=\mu\sqrt{h^2+k^2}$$

$$(h^2+k^2)\sin\frac{1}{h^2+k^2}=\mu\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\mu=\sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{h^2+k^2}\overset{\text{ومنه}}{\Longrightarrow}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\mu(h,k)=0$$

أي f قابل للاشتقاق في $(0,0)$، وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق على R^2

ج) نأخذ المتتالية: $\left\{\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}},\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$$f_x\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}},\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\sin\frac{1}{\frac{1}{4\pi n}+\frac{1}{4\pi n}}-\frac{\frac{1}{\sqrt{n\pi}}}{\frac{1}{2n\pi}}\cos\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}$$

$$=-2\sqrt{n\pi}\overset{\text{ومنه}}{\Longrightarrow}\lim_{n\to\infty}f_x=\infty$$

بنفس الطريقة مع f_y

M. Naji Erani

مثال:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x) = \log(1 + x_1 - 2x_2 + \dots + n x_n)$

أوجد $d_c f(x-c)$

$c(0, 0, \dots, 0)$

الحل:

$d_c(h) = \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} \cdot h_i$

$x - c = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{1 + x_1 + 2x_1 + \dots + n x_n}$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) = 1$

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{2}{1 + x_1 + 2x_2 + \dots + n x_n}$

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(c) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}(c) = 3 \dots$

$d_c f(\overset{h_1}{x_1}, \overset{h_2}{x_2}, \dots, \overset{h_n}{x_n}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + n x_n$

وظيفة:

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \|x\|^{2r}$

أوجد $d_c f(x-c)$ حيث $c(1, 1, \dots, 1)$