المحاضرة 11

مبرهنة: لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

ولتكن $c \in D^\circ$ بإذا كانت f قابلة للاشتقاق في c

فإن f قابلة: مستمرة في النقطة c

البرهان:

بما أن f قابلة للاشتقاق حسب المبرهنة السابقة يوجد عددان موجبان k ، δ_1 بحيث إذا كان $\|x-c\| < \delta_1$ فإن

$$|f(x) - f(c)| < k\|x-c\|$$

وبالتالي يوجد $\delta = \min(\delta_1, \frac{\varepsilon}{k})$

$$|f(x) - f(c)| < k\|x-c\| < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ f مستمرة في c

وبالتالي f مستمرة في c

ملاحظة: f قابلة للاشتقاق $\Leftarrow$ f مستمرة

f غير مستمرة $\Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق

مثال: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & ; y = 0 \\ \frac{x}{y} & ; y \neq 0 \end{cases}$$

أو نحلها بطريقة المشتقات حل المحاضرة 7

اثبت أن f غير قابل للاشتقاق في $(0,0)$

الحل: لنبرهن أن f غير مستمر في $(0,0)$

نفرض جدلاً أن f مستمر في $(0,0)$

M. Naji Erani

$\forall \varepsilon > 0 , \varepsilon = \frac{1}{2} , \exists \delta > 0 , \|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |\frac{x}{y} - 0| < \varepsilon$

لو أخذنا $x = y = \frac{\delta}{2}$

$x^2 + y^2 = \frac{2\delta^2}{4} = \frac{\delta^2}{2} < \delta^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} < \delta^2$

لكن $|\frac{x}{y}| = 1 \not< \frac{1}{2}$

وهذا تناقض وبالتالي f غير مستمر عند (0,0) وبالتالي غير قابل للاشتقاق.

مبرهنة: لتكن f دالة معرفة على مجموعة جزئية

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

ولتكن c تنتمي في داخل D (c نقطة داخلية في D) $c \in D^\circ$

فإذا كانت كل المشتقات الجزئية الأولى $\frac{\partial f}{\partial x_n} , \dots , \frac{\partial f}{\partial x_1} , \frac{\partial f}{\partial x}$

موجودة في جوار ما للنقطة c ومستمرة في c فإن f قابل للاشتقاق في نقطة c

---

نتيجة: إن وجود المشتقات الجزئية الأولى واستمرارها على كامل الساحة D يقتضي قابلية الاشتقاق الدالة على كامل الساحة D وبالتالي فإن f مستمرة في جميع نقاط الساحة D

خواص الدوال القابلة للاشتقاق: $f , g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$c \in D^\circ$ ، كل من f ، g قابلة للاشتقاق في النقطة c فإن

1) الخاصة الخطية: $\alpha f + \beta g$ تكون قابلة للاشتقاق في نقطة c حيث $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$

$$d_c(\alpha f + \beta g) = \alpha d_c f + \beta d_c g$$

2) $f.g$ قابلة للاشتقاق في النقطة c وأكثر من ذلك

$$d_c(f.g) = (d_c f).g + f(d_c g)$$

قابلية الاشتقاق للدوال المركبة:

$u, v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto u(x,y)$

و $(x,y) \longmapsto v(x,y)$

ولتكن F دالة متجهية $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$

$= (u,v)(x,y)$

- الدالة المتجهة هي زوج مرتب من الدوال الحقيقية ونقول عن الدالة المتجهة F أنها قابلة للاشتقاق في نقطة داخلية c من D إذا كانت الدالتان الحقيقيتان u, v قابلتان للاشتقاق في النقطة c أي (كل مركبة من مركباتها قابلة للاشتقاق في النقطة c)

$D \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} D' = \{F(D)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

F قابلة للاشتقاق في (a,b)

f قابلة للاشتقاق في $u(a,b)$، $v(a,b)$ ثابتة u, v دالة

$g = f \circ F$ قابلة للاشتقاق

$\Longrightarrow g(a,b) = f(F(a,b)) = F(u(a,b), v(a,b))$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(a,b)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(a,b)$$

مثال: لتكن f دالة حقيقية معرفة على $\mathbb{R}^2$ بعد حذف المحور oy $(\mathbb{R}^2 \setminus \{oy\})$ والمعرفة بالشكل التالي

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالتين

$x(t) = \cos t$

$y(t) = \sin t$

احسب بطريقتين $\frac{d}{dt} F(x(t), y(t))$

الحل:

$$f(x(t), y(t)) = \operatorname{arctg} \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{arctg} . \operatorname{tg} t = t$$

تبسيط

$$\frac{df}{dt} = 1$$

أو

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} (-\sin t) + \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} (\cos t) \qquad \boxed{(\operatorname{arctg} z)' = \frac{z'}{1+z^2}}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} (-\sin t) + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} (\cos t)$$

$$= \frac{-y}{x^2+y^2} (-\sin t) + \frac{x}{x^2+y^2} \cos t = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2 y}{x^6 + 2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

بين أنه توجد للدالة f مشتقة في $(0,0)$ في اتجاه $u(\alpha, \beta)$

حيث $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

بما أن f غير مستمر في $(0,0)$