نمذجة رياضية

المحاضرة التاسعة

٢٠١٥/٤/٧

ورشة ميكانيكية:

في ورشة ميكانيكية آلة ثقب بالضغط وخمس آلات فرز وخراطة.
وتستخدم هذه الآلات لإنتاج قطع مجمعة من جزأين 1, 2.
وتُعطى إنتاجية كل من الآلات لأي من الجزأين بالجدول التالي:

الجزء	زمن الإنتاج دقيقة/جزء	
	الثقب	الفرز والخراطة
1	3	20
2	5	15

نرغب بالحفاظ على أعباء عمل متوازنة بين الآلات، بحيث لا تعمل أية آلة بما يزيد عن 30 دقيقة في اليوم عن بقية الآلات.
ونفرض أن أعمال الفرز والخراطة تُوزَّع على نحوٍ متوازٍ بين آلات الفرز والخراطة الموجودة.
ونفرض أن طول يوم العمل العادي 8 ساعات.

المطلوب: قسّم زمن عمل الآلات للحصول على العدد الأعظمي من القطع المجمعة.

الحل: نفرض:
x_1 عدد الأجزاء الأولى (من الجزء 1) المنتجة يومياً.
x_2 عدد الأجزاء الثانية (من الجزء 2) المنتجة يومياً.

- إن عبء العمل على آلات الفرز والخراطة هو: $20x_1+15x_2$ دقيقة.
ولكن لدينا خمس آلات وبالتالي يكون عبء العمل على آلة الفرز والخراطة الواحدة مقدراً بالدقائق:

$$\frac{1}{5}(20x_1+15x_2)=4x_1+3x_2$$

ولا يمكن للآلة الواحدة أن تعمل أكثر من 8 ساعات أي 480 دقيقة.
ومنه يكون شرط عبء العمل على آلة الفرز والخراطة:

$$4x_1+3x_2\leq 480$$

- أما شرط عبء العمل على آلة الثقب فيكون:

$$3x_1+5x_2\leq 480$$

- شرط الزمن: لا تعمل أية آلة بما يزيد عن 30 دقيقة في اليوم عن بقية الآلات
ولكننا لا نعرف أية آلة يمكن أن تعمل أكثر من الأخرى، لذا علينا أخذ الفرق بين الزمنين بالقيمة المطلقة:

$$|(4x_1+3x_2)-(3x_1+5x_2)|\leq 30$$
$$\Rightarrow |x_1-2x_2|\leq 30$$

هذا القيد غير خطي ولكن نستطيع تحويله إلى قيدين خطيين:

$$\begin{cases} x_1-2x_2\leq 30 \\ x_1-2x_2\geq -30 \Rightarrow 2x_2-x_1\leq 30 \end{cases}$$

- بالنسبة لتابع الهدف: بما أن عدد القطع المجمعة لا يمكن أن يتجاوز العدد الأصغر من الأجزاء 1 و 2 المنتجة، فيُعبَّر عن تابع الهدف لجعل القيمة:
$Z=Min(x_1,x_2)$ أكبر ما يمكن، ولكن هذا الشكل غير خطي.
نعالجه بإضافة متحول جديد $y=Min(x_1,x_2)$ يمكن التعبير عن عبارة y بالمتراجحتين الخطيتين:

$$\begin{cases} y\leq x_1 \Rightarrow x_1-y\geq 0 \\ y\leq x_2 \Rightarrow x_2-y\geq 0 \end{cases}$$

ثم نجعل دالة الهدف $Z=y$ ونريد قيمتها العظمى.

* ومنه أصبح النموذج الرياضي نظامياً:

أوجد القيمة العظمى للتابع:

$$Z = y \longrightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 480$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 480$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 30$$
$$2x_2 - x_1 \leq 30$$
$$x_1 - y \geq 0$$
$$x_2 - y \geq 0$$
$$x_1, x_2, y \geq 0$$

ملاحظة هامة: (سؤال دورة)

- إن الأرقام المكتوبة في الجدول المعطى تعبّر عن عدد الدقائق التي يستغرقها إنتاج الجزء الواحد، وذلك بسبب كتابة (دقيقة/جزء) عند زمن الإنتاج في الجدول.
- بينما لو كان مكتوباً (جزء/دقيقة) فهذا يعني أنه في الدقيقة الواحدة يمكن إنتاج عدد من الأجزاء، وبالتالي يكون زمن إنتاج الجزء الواحد هو مقلوب الرقم المكتوب في الجدول. أي في هذه الحالة يصبح لدينا:

* شرط عبور العمل على آلة القرزو الخراطة:

$$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{20}x_1 + \frac{1}{15}x_2\right) \leq 480 \Rightarrow \frac{1}{100}x_1 + \frac{1}{75}x_2 \leq 480$$

* شرط عبور العمل على آلة الثقب:

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \leq 480$$

* أما شرط الزمن فيصبح بالشكل:

$$\left|\left(\frac{1}{100}x_1 + \frac{1}{75}x_2\right) - \left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{5}x_2\right)\right| \leq 30$$

انتهت المحاضرة التاسعة