المحاضرة الرابعة

2015 / 3 / 23

الحل العام للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة

هو مجموع الحلين « الأول الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة الموافقة و الثاني الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة

Ex باستخدام سلاسل القوى أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$y'' + y = x^2 + 1$ بجوار $x_0 = 0$

نلاحظ أن $x_0 = 0$ نقطة عادية نبحث عن الحلول

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n , \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}$$

نعوض

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) C_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) C_{n+2} + C_n \right] x^n = 0 \quad \ldots \circledast$$

بالمطابقة نجد

$$C_{n+2} = \frac{-C_n}{(n+1)(n+2)} \quad ; n \geq 0$$

$$n = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{-C_0}{2} = \frac{-C_0}{2!}$$

$$n = 1 \Rightarrow C_3 = \frac{-C_1}{2.3} = \frac{-C_1}{3!}$$

$$n = 2 \Rightarrow C_4 = \frac{-C_2}{3.4} = \frac{C_0}{4!}$$

$$n = 3 \Rightarrow C_5 = \frac{C_1}{5!}$$

/ /

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$$

$$= C_0 + C_1 x - \frac{C_0}{2!}x^2 - \frac{C_1}{3!}x^3 + \frac{C_0}{4!}x^4 + \frac{C_1}{5!}x^5 \cdots$$

$$= C_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + C_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$y = C_0 \cos x + C_1 \sin x$$

من * نجد : $\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) C_{n+2} + C_n \right] x^n = x^2 + 1$

نفكك الى ان نصل الى درجة المعادلة في الطرف الثاني اي الى الدرجة (2)

$$((1.2) C_2 + C_0) + ((2.3) C_3 + C_1) x + ((3.4) C_4 + C_2) x^2$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) C_{n+2} + C_n \right] x^n = x^2 + 1$$

بالمطابقة نجد:

$$2C_2 + C_0 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1 - C_0}{2}$$

$$6C_3 + C_1 = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{-C_1}{6}$$

$$C_4 = \frac{1 - C_2}{12}$$

نفرض $C_0 = 1$ و $C_1 = 0$ "نفرضها على كيفنا"

$$C_2 = 1, \quad C_3 = 0, \quad C_n = 0 \ldots \forall n \geq 3$$

$$y = -1 + 0x + 1x^2 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots$$

$$y = x^2 - 1$$

$$Y = y_1 + y_2$$

$$\boxed{Y = C_0 \cos x + C_1 \sin x + x^2 + 1}$$

حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بأمثال متغيرة بجوار

النقطة الشاذة النظامية

* مبرهنة الوجود والوحدانية

بفرض x_0 هي نقطة شاذة نظامية للمعادلة التفاضلية عندئذ يوجد حل

واحد على الأقل للمعادلة التفاضلية بجوار النقطة x_0 يكون قابلاً للنشر

على الشكل $y = (x-x_0)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n \; ; C_0 \neq 0$

وتكون المتسلسلة :

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n$ متقاربة بالمجال $R > |x-x_0|$

* طريقة إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار النقطة الشاذة النظامية

تكتب المعادلة : $(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0) P(x) y' + q(x) y = 0$

1. نبحث عن حل من الشكل : $y = (x-x_0)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n$

وبفرض النقطة الشاذة $x_0 = 0$ يصبح الحل

$$y = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

2. نوجد المشتقة الأولى والثانية ونعوض بالمعادلة - نوحد القوى

نوحد الحدود الدنيا للمتسلسلات ونحصل على العلاقة التكرارية

3ـ نوجد المعادلة المميزة $\lambda(\lambda-1)+P(0)\lambda+q(0)=0$

وهي تمثل امثال الحد الأول من المتسلسلة الناتجة وهي معادلة من

الدرجة الثانية بالنسبة لـ λ ، نوجد الحلول لهذه المعادلة ولتكن

$$\lambda_1 \geq \lambda_2$$

4ـ نعوض λ_1 (الحد الأكبر) فنحصل على العلاقة التكرارية فنحصل على الحل

الخاص الأول: $y_1=|x|^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \; ; C_0 \neq 0$.

5ـ نوجد الحل الخاص الثاني ويميز ثلاث حالات

a: $(\lambda_1-\lambda_2)$ ليس عدد صحيح يكون الحل الخاص الثاني

$$y_2=|x|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n x^n \; ; \bar{C}_0 \neq 0$$

b: $(\lambda_1=\lambda_2)$ اي $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ الحل يكون

$$y_2=|x|^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n x^n + y_1 \ln|x|$$

c: $(\lambda_1-\lambda_2)$ عدد صحيح

$$y_2=|x|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n x^n + a y_1 \ln|x|.$$

وظيفة: باستخدام متسلسلات القوى أوجد الحل العام

للمعادلات التفاضلية بجوار $x_0=0$

[1] $x^2y''-(x+2)y=0$

[2] $2x^2y''+(x-x^2)y'-y=0$

تمرين: أوجد الحل باستخدام متسلسلات القوى الحل العام بجوار $x_0 = 0$

$$4xy'' + 2y' + y = 0 \quad \ldots \text{(1)}$$

نلاحظ أن $x_0 = 0$ نقطة شاذة نظامية

هذه الفقرة للفهم وغير ضرورية للحل ولا نستفاد بالخطوة التالية

$$4x^2y'' + 2xy' + xy = 0$$

يجب تحويلها الى الشكل $x^2y'' + xP(x)y' + q(x)y = 0$

$$xP(x) \longleftarrow x^2y'' + \frac{x}{2}y' + \frac{x}{4}y = 0$$

$$P(x) = \frac{1}{2} \quad , \quad q(x) = \frac{x}{4}$$

$$P(0) = \frac{1}{2} \quad , \quad q(0) = 0$$

نكتب المعادلة المميزة

$$\lambda(\lambda - 1) + \frac{1}{2}\lambda + 0 = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = 0$$

يفضل أن نأخذ الكبير لا الصغير.

نبحث عن الحل من الشكل

$$y = x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\lambda}$$

$$y = C_0 x^{\lambda} + C_1 x^{1+\lambda} + C_2 x^{2+\lambda} \ldots\ldots + C_n x^{n+\lambda}$$

$$y' = \lambda C_0 x^{\lambda-1} + (1+\lambda)C_1 x^{\lambda} + (2+\lambda)C_2 x^{1+\lambda} \ldots\ldots$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)C_n x^{n+\lambda-1} \longrightarrow$$

~~بسبب~~ الحد الأول من $n=0$ لانه يوجد C_0

/ /

$$y'' = \lambda(\lambda-1)\,C_0\,x^{\lambda-2} + \lambda(\lambda+1)\,C_1\,x^{\lambda-1} + \dots$$

$$\boxed{y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)\,C_n\,x^{n+\lambda-2}}$$

نعوض بـ ① كـ

- $$4x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)\,C_n\,x^{n+\lambda-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)\,C_n\,x^{n+\lambda-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,x^{n+\lambda} = 0$$

ترتيب

- $$4\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)\,C_n\,x^{n+\lambda-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)\,C_n\,x^{n+\lambda-1} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1}\,x^{n+\lambda-1}$$

- $$4(\lambda)(\lambda-1)\,C_0\,x^{\lambda-1} + 2\lambda\,C_0\,x^{\lambda-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\big[4(n+\lambda)(n+\lambda-1) + 2(n+\lambda)\big]C_n + C_{n-1}\Big]x^{n+\lambda-1} = 0$$

- $$4\lambda(\lambda-1)\,C_0 + 2\lambda\,C_0 = 0$$

$$[4\lambda^2 - 4\lambda + 2\lambda]\,C_0 = 0 \qquad \because C_0 \neq 0 \longrightarrow \text{الشرط}$$

$$\Longrightarrow 4\lambda^2 - 2\lambda = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \tfrac{1}{2},\quad \lambda_2 = 0$$

نوجد $\lambda_2 - \lambda_1$ ونكمل على هذا الأساس

[illegible]