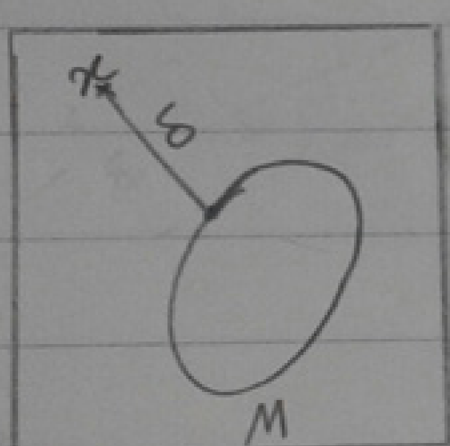
المحاضرة الثانية عشرة ..
الثلاثاء 2015/4/21 ..

مبرهنة (المقرب الأصغر) :

لتكن X فضاء جداء داخلي و لتكن M مجموعة جزئية غير خالية و محدبة وتامة (بالنسبة للمترك المحدد بالجداء الداخلي) عندئذٍ يوجد لكل عنصر x من X عنصر وحيد y من M بحيث يكون:

$$d(x,M)=\inf_{y\in M} d(x,\bar{y})=\inf_{y\in M}\|x-y\|=\|x-y_0\| = \delta$$

البرهان :



١- الوجود :

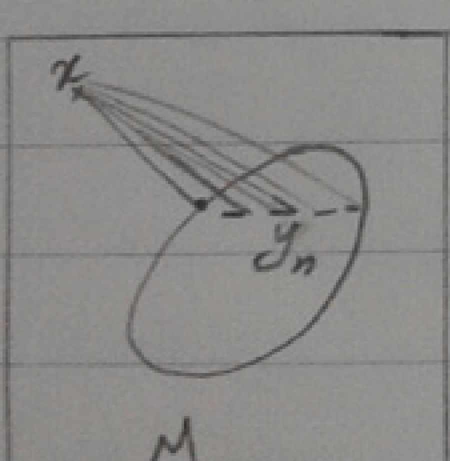
استناداً إلى تعريف الحد الأدنى $\inf$

فإنه يوجد متتالية (y_n) من عناصر M بحيث :

$$\delta_n \longrightarrow \delta \quad \text{و} \quad \|x-y_n\| = \delta_n$$

((بعد المتتالية (y_n) عن x هي المتتالية التي تتقارب من δ))

((أي أن المتتالية الأصغرية هي المتتالية العددية (متتالية الأبعاد).))



سنبرهن أن (y_n) كوشية :

نضع : $v_n = y_n - x$

نحسب المقدار : $\|v_n + v_m\|$

حيث $v_m = y_m - x$

كل بعد يحدد نقطة وبالتالي تشكل متتالية من نقاط M

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\|$$
$$= 2\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\|$$

إنّ $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$ وذلك كون المجموعة M محدبة

وبالتالي:

$$\|v_n + v_m\| = 2\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\| \geq 2\delta$$

لأنّ δ هو inf.

بتطبيق مساواة متوازي الأضلاع:

$$\|v_n - v_m\| = \|y_n - x - (y_m - x)\| = \|y_n - y_m\|$$

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2$$
$$= -\|v_n + v_m\|^2 + 2\left(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2\right)$$
$$\leq -4\delta^2 + 2\delta_n^2 + 2\delta_n^2 \to 0 \qquad n \to \infty$$

$$2(\delta_n^2 - \delta^2) = (\delta_n - \delta)\underbrace{(\delta_n + \delta)}_{\text{محدود}} \to 0$$

وبالتالي (y_n) كوشية

ولما كانت M تامة فإنّ (y_n) متقاربة ولنفرض مثلاً أن $y_n \to y \in M$

سنبين أنّ بعد y عن x هو δ.

ب: $\|x - y_n\| = \delta_n$

وبالتالي $\lim \|x - y_n\| = \lim \delta_n$

وبما أنّ $\|.\|$ دالة مستمرة فأستطيع المبادلة بين الرمزين $\|.\|$ و lim

$$\|\lim(x - y_n)\| = \lim \delta_n = \delta$$

$$\|x - y\| = \delta$$

$\frac{b}{2}$: أسلوب الكتاب

إن $y \in M$ لأنها نهاية لمتتالية كوشية في M

وبالتالي: $\|x-y\| \geq \delta \quad (1)$

ولدينا: $\|x-y\| \leq \|x-y_n\| + \|y_n-y\|$

عندما $n \to$ ، $\|x-y_n\| \to \delta$ و $\|y_n-y\| \to 0$

$(2) \quad \|x-y\| \leq \delta$

من (1) و (2) نجد أنّ:

$$\|x-y\| = \delta$$

ب- الوحدانية:

سنفترض أنّ العنصرين y و y_0 في M يحققان:

$$\|x-y\| = \delta$$

$$\|x-y_0\| = \delta$$

وسنبرهن أنّ $y = y_0$.

تطبيق مساواة متوازي الأضلاع:

$$\|y-y_0\|^2 = \|(y-x)-(y_0-x)\|^2$$

$$= 2\|y-x\|^2 + 2\|y_0-x\|^2 - \|(y-x)+(y_0-x)\|^2$$

$$= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\left\|\frac{y+y_0}{2} - x\right\|^2$$

$$\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$$

لأنّ $\frac{y+y_0}{2} \in M$ وإن بعد النقطة $\frac{y+y_0}{2}$ عن x أكبر أو يساوي δ

أي: $\left\|\frac{1}{2}(y+y_0) - x\right\| \geq \delta$

$$-4\left\|\frac{1}{2}(y+y_0) - x\right\|^2 \leq -4\delta^2$$

وبالتالي: $\|y-y_0\| \leq 0$

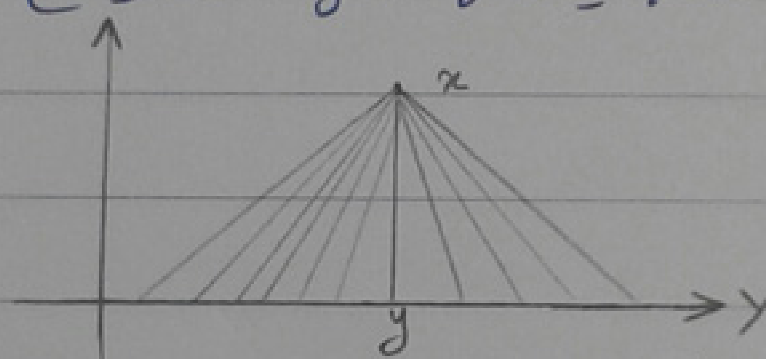
ونعلم أنَّ: $\|y-y_0\| \geq 0$

فيكون: $\|y-y_0\| = 0$

$\Rightarrow y = y_0$

مبرهنة (التعامد):

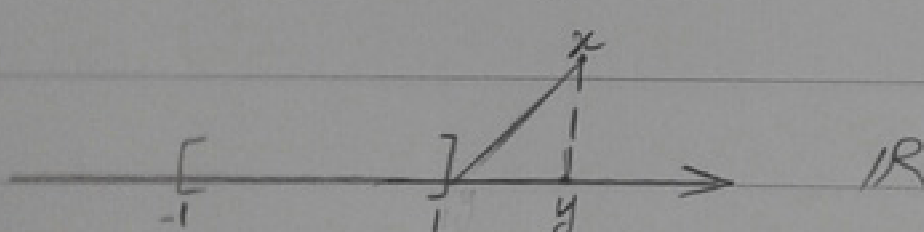
لنفترض أنه في المبرهنة السابقة M فضاء جزئي تام Y و أنَّ x نقطة مثبتة في X. عندئذٍ يكون $z = x - y$ عمودياً على Y.



$x - y \perp Y$

العمود هو الذي يعطي البعد الأصغري

y موجودة حسب المبرهنة السابقة وهي التي تعطي البعد الأصغري عن x.

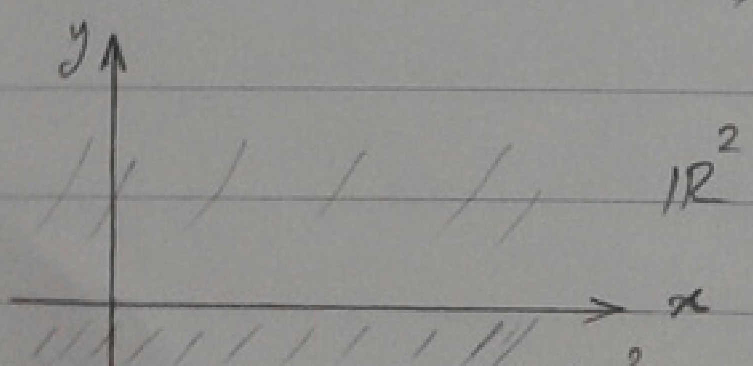


مثال:

إن المجموعة $[-1,1]$ محدبة وتامة

إذا أخذنا $\mathbb{R}$ فضاء جزئي فإن النقطة التي تعطي البعد الأصغري عن x هي المسقط.

إن $\mathbb{R}$ مفتوح ومغلق بآنٍ معاً حيث أن التبولوجيا هي المألوفة



إنَّ ox مغلق (فضاء جزئي من $\mathbb{R}^2$) حيث أن متممة هي النصف العلوي والسفلي من المستوي وهي مفتوحة.

انتهت المحاضرة ...