Appointment Notes يوم الخميس المحاضرة الثالثة عشر في ٢٣/٤/٢٠١٢

السطوح التكاملية المتعامدة مع مجموعة سطوح معطاة

لنفرض أنه لدينا السطوح التابعة لوسيط واحد ومعطاة بالمعادلة $\varphi(x,y,z)=0$ فالسطوح المتعامدة مع مجموعة السطوح هي السطوح المولدة بالمنحنيات التكاملية للجملة التفاضلية الملحقة التالية:

$$\frac{\partial x}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\partial y}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{\partial z}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}$$

طريقة إيجاد المعادلة الملحقة // للفهم فقط !! غير مطلوب بالامتحان...

$$(P,Q,R) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$ السطوح المتعامدة

حيث: $z = \varphi(x,y)$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right)$$

يجب أن يكون جداؤهم (صفر)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0$$

Sunday
May

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} - R = 0 \Longrightarrow P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R$$

معادلة تفاضلية وحلها هو عبر المعادلة الملحقة التالية

$$\frac{\partial x}{P} = \frac{\partial y}{Q} = \frac{\partial z}{R} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial x}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\partial y}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{\partial z}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}}$$

تمرين: أوجد السطح التكاملي المتعامد مع أسرة السطوح المعطاة بالمعادلة

$$z(x+y) = c(3z+1)$$

والمار بالدائرة المعطاة بالمعادلتين $x^2+y^2=1$, $z=1$

من الفرض يجب علينا عزل c وجعلها تابعة لـ x,y,z

$$C = \frac{z(x+y)}{3z+1}$$

$$\frac{\partial x}{\frac{z}{3z+1}} = \frac{\partial y}{\frac{z}{3z+1}} = \frac{\partial z}{\frac{(x+y)}{(3z+1)^2}}$$

نضرب بـ: $\frac{1}{(3z+1)^2}$

$$\overset{①}{\frac{dx}{(3z+1)z}} = \overset{②}{\frac{dy}{(3z+1)z}} = \overset{③}{\frac{dz}{(x+y)}}$$

$$① = ②$$

$$dx = dy \Longrightarrow x = y + c_1 \Longrightarrow \boxed{c_1 = x - y} \xrightarrow{} u$$ التكامل الأولي الأول

$$x① + ②y - ③(3z+1)z$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy - (3z+1)z\,dz}{xz(3z+1) + yz(3z+1) - z(3z+1)(x+y)} = \frac{x\,dx + y\,dy + z(3z+1)\,dz}{0}$$

$$\Longrightarrow x\,dx + y\,dy - z(3z+1)\,dz = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{3}z^3 + \frac{1}{2}z^2 = c'_2 \quad (\times 2)$$

$$v = \boxed{x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 = c_2} — ②$$ التكامل الأولي الثاني

السطوح التكاملية هي من الشكل:

$$F(u, v) = 0 \Longrightarrow F(x - y,\ x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2) = 0$$

ومنه السطح المتعامد مع السطوح والمار بالدائرة ~~هو~~ بتعويض معطيات الدائرة بـ ② وهـ ج

$$1 - 2 - 1 = -2 = c_2 \Longrightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 = -2}$$

معادلة لاغرانج المتجانسة

المعادلة التفاضلية الخطية الجزئية من المرتبة الأولى وهي المتجانسة (لاغرانج) هي من الشكل

$$Pp + Qq = 0$$

الحل العام لهذه المعادلة هو $F(u,v) = 0$ حيث $u = c_1$ و $v = c_2$ والمعادلة الملحقة هي

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = 0 \ ; \ dz = 0 \Longrightarrow z_1 = c_1 \Longrightarrow F(u,v) = 0 = F(z, v)$$

تمرين وحله:

أوجد الحل العام والسطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية التالية:

$$yp - xq = 0$$

والسطح التكاملي المار من المنحني المعطى بالمعادلة $\boxed{x - z^2 = 1,\ y = 0}$

تمارين وظيفة: اوجد الحل العام ، السطوح التكاملية ، للمعادلات التفاضلية التالية

① $y.z.p - x.z.q = e^{z}$

② $(y-z)^2 p + x.z q = xy$

③ $p \sin^2 x + q \tan z = \cos^2 z$

④ $(y+z)p + (x+z)q = x-y$

⑤ $z(y-x) + zp(y+z) - zq(x+y) = 0$

⑥ $x^2 p + y^2 q = (x+y)z$

⑦ $xy^3 p + x^2 z^2 q = y^3 z$

والمار بالمنحني $y = z^2 \;,\; x = -z^3$

وظيفة ②: اوجد الحل للمعادلات التفاضلية الجزئية التالية:

① $r = 6x$ ② $t = \sin(x.y)$, ③ $s = ax + by$

حل التمرين ④:

$$\overset{①}{\frac{dx}{y+z}} = \overset{②}{\frac{dy}{x+z}} = \overset{③}{\frac{dz}{x-y}}$$

$$\frac{dx+dz}{x+z} = \frac{dx-dy}{y-x} \Longrightarrow \frac{(x+z)d}{x+z} = \frac{-d(x-y)}{x-y}$$

تكامل اولي اول

$$\ln|x+z| = -\ln|x-y| + \ln|C_1|$$

$$\ln|x+z| + \ln|x-y| = \ln|C_1| \Longrightarrow \overset{u}{\boxed{C_1 = (x+z)(x-y)}}$$

① + ③ − ②

$$\frac{dx+dz-dy}{y+z+x-y-x-z} = \frac{dx+dz-dy}{0} \Longrightarrow dx+dz-dy = 0$$

$$v \leftarrow \boxed{x+z-y = C_2}$$ تكامل اولي ثاني

$$F(u,v) = 0 \Longrightarrow F((x+z)(x-y),\, x+z-y) = 0$$

حل التمرين ⑦:

$$\underset{①}{\frac{dx}{xy^3}} = \underset{②}{\frac{dy}{x^2 z^2}} = \underset{③}{\frac{dz}{y^3 z}}$$

① = ③

$$\frac{dx}{xy^3} = \frac{dz}{y^3 z} \Longrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \Longrightarrow \ln|x| = \ln|z| + \ln|C_1|$$

$$\Longrightarrow \boxed{C_1 = \frac{x}{z}}$$ تكامل اولي اول

② = ③

$$\frac{dy}{x^2 z^2} = \frac{dz}{y^3 z} \Longrightarrow \frac{dy}{x^2 z} = \frac{dz}{y^3} \Longrightarrow y^3\, dy = x^2 z\, dz$$

نعوض x بدلالة C_1 لانه يمكن اعتبار C_1 ثابت بالنسبة لـ z ولكن x لا يمكن اعتبارها ثابتة لـ z

من التكامل الاولي الاول نجد أن $x = C_1 z$

$$\Longrightarrow y^3\, dy = C_1^2 z^3\, dz \Longrightarrow \frac{1}{4} y^4 = \frac{1}{4} C_1^2 z^4 + C_2$$

بالحل نجد:

$$\Longrightarrow \boxed{C_2 = y^4 - \frac{x^2}{z^2} z^4}$$

$C_1 = \frac{x}{z}$ ...... ①

$C_2 = y^4 - x^2 z^2$ -- ②

$y = z^2$ ...... ③

$x = -z^3$ ...... ④

$C_1 = \frac{x}{z} \Rightarrow C_1 = \frac{-z^3}{z} = -z^2$

$C_2 = (z^2)^4 - (-z^3)^2 z^2 = z^8 - z^8 = 0$

$\Rightarrow \boxed{y^4 - x^2 z^2 = 0}$ معادلة السطح

استودعكم الى فرصة