تحويل برنامج خطي من شكل إلى آخر :

1 كيفية تحويل برنامج خطي الى شكل قانوني :

• تحويل تابع الهدف : اذا كان تابع الهدف من النوع تقليل نحوله الى نوع تعظيم وذلك بالضرب بـ -1 اي أن :

$$Min\ Z = f(x) \longrightarrow Max\ Z = -f(x)$$

مثال:

$$Min\ Z = 3x_1 + 5x_2 - 2x_3$$

$$\Longrightarrow Max\ Z = -3x - 5x_2 + 2x_3$$

• تحويل المتباينات:

- تحويل المتباينات من النوع $\geq$ (أكبر أو يساوي) الى متباينات من النوع $\leq$ (اصغر أو يساوي) نضرب طرفي المتباينة بـ -1 : اي :

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b_1$$

$$-a_1x_1 - a_2x_2 \leq -b_1$$

- تحويل القيد من النوع معادلة: نحول القيد أولاً الى متباينتان مختلفتان بالاشارة أول متباينة من النوع اكبر أو يساوي والمتباينة الثانية من النوع اصغر أو يساوي . ثم نحول المتباينة الاولى (أكبر او يساوي) تماما الفقرة السابقة .

مثال: $a_1x_1 + a_2x_2 = b$

الخطوة الاولى:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \ ✓$$

الخطوة الثانية:

$$-a_1x_1 - a_2x_2 \leq -b$$

- تحويل المتباينة من النوع اصغر او يساوي والتي يكون في الطرف الايسر ذو قيمة مطلقة اولا نقوم بتحويلها الى متباينتين : احداهما من النوع اكبر أو يساوي والاخرى من النوع اصغر أو يساوي ثم نحول المتباينة من النوع اكبر أو يساوي الى متباينة من النوع اصغر أو يساوي .

مثال:

$$|a_1x_1 + a_2x_2| \leq b$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \\ a_1x_1 + a_2x_2 \geq -b \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \\ -a_1x_1 - a_2x_2 \leq b \end{array}$$

- **ملاحظة** : في الحالتين السابقتين نلاحظ ان للمتغيرات x_1, x_2 هما غير محددي الاشارة مع ثبات اشارة الطرف الايمن من المتباينة وفي هذه الحالة نرمز للكمية الموجبة بـ x^+ وللكمية السالبة x^- .

وتتحدد قيمته بالفرق المطلقة بين كميته في حال كون اشارته موجبة وفي حال كون اشارته سالبة . $x^+ - x^-$

/ /

هذا على اعتبار $x^{+} \geq 0$ و $x^{-} \geq 0$ وذلك وفقاً لمعادلات عدم السلبية .

مثال : لدينا مسألة البرمجة الخطية والتي فيها المتغير x_3 غير محدد الإشارة .

$$Min\ Z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

ضمن الشروط :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 50$$

$$5x_1 + 8x_2 - x_3 \geq 0$$

$$3x_2 + 5x_3 = 70$$

$$|x_1 + 3x_2| \leq 40$$

x_3 غير محدد الإشارة ، $x_1 , x_2 \geq 0$

المطلوب : تحويل هذه المسألة إلى الشكل القانوني :

- اولاً لنحول تابع الهدف الى تابع تعظيم :

$$Max\ Z = -3x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

ضمن الشروط :

- القيد الاول يبقى كما هو . (اصغر أو يساوي) .
- القيد الثاني من النوع اكبر او يساوي نحوله الى اصغر او يساوي وذلك بضربه بـ ١- .
- القيد الثالث من نوع مساواة نحوله الى اكبر او يساوي و اصغر او يساوي ثم نحول الاكبر او يساوي الى اصغر او يساوي وذلك بضربه بـ ١- .
- القيد الرابع من نوع قيمة مطلقة نحول الى قيدين احدهما اكبر او يساوي والاخر اصغر او يساوي ثم نحول الاكبر او يساوي الى اصغر او يساوي وذلك بضربه بـ ١- .
- شروط عدم السلبية تبقى كما هي .
- القيد x_3 غير محدد الاشارة لذا نجد $X_3 = x_3^{+} - x_3^{-}$ حيث $x_3^{+} \geq 0 , x_3^{-} \geq 0$

وبالتالي يصبح البرنامج الخطي بالشكل القانوني كمايلي :

$$Max\ Z = -3x_1 + 2x_2 - 5(x_3^{+} - x_3^{-})$$

ضمن الشروط :

$$x_1 + 2x_2 + 3(x_3^{+} - x_3^{-}) \leq 50$$

$$-5x_1 - 8x_2 + (x_3^{+} - x_3^{-}) \leq 0$$

$$3x_2 + 5(x_3^{+} - x_3^{-}) \leq 70$$

$$-3x_2 - 5(x_3^{+} - x_3^{-}) \leq -70$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 40$$

$$-x_1 - 3x_2 \leq 40$$

$$x_1 , x_2 , x_3^{+} , x_3^{-} \geq 0$$

2 كيفية تحويل برنامج خطي إلى الشكل القياسي :

نستخدم الشكل القياسي عند حل المسائل بطريقة Simplex .

في هذا الشكل يجب أن تكون المقيدات عبارة عن معادلات ، أما شروط عدم السلبية فهي دائماً من النوع أكبر أو يساوي .

الطرف الأيمن من المقيدات هو قيمة غير سالبة .

دالة الهدف يمكن أن تكون من النوع $Max Z , Min Z$.

ثبات المقيدات يجب أن تكون جميعها من النوع مساواة . فالمتباينة من النوع أصغر أو يساوي يمكن تحويلها إلى مساواة وذلك بإضافة متغير إضافي إلى الطرف الأيسر .

مثلاً :

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$

$$\Longrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + S = b \Longrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 = b - S$$

أما المتباينة من النوع أكبر أو يساوي يمكن تحويلها إلى مساواة وذلك بطرح متغير إضافي من الطرف الأيسر .

مثلاً :

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$$

$$\Longrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 - S = b$$

إذاً تصبح مسألة البرمجة الخطية بعد وضعها بالشكل القياسي

$$Min\,Z \quad or \quad Max\,Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

ضمن القيود :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad ; \quad i = \overline{1,m}$$

$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

مثال : حول مسألة البرمجة الخطية التالية من الشكل القانوني إلى الشكل القياسي :

$$Max\,Z = 5x_1 + 4x_2$$

ضمن الشروط :

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

ان الشكل القياسي للبرنامج السابق هو: $Max\ Z = 5x_1 + 4x_2$

ضمن الشروط : نقوم بإضافة متحولات اضافية الى الطرف الايسر من القيدات السابقة :

$$2x_1 + 3x_2 + S_1 = 6$$
$$-3x_1 + 2x_2 + S_2 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + S_3 = 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad , \quad S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

" في الامتحان يجب كتابة تابع الهدف بالشكل: $Max Z = 5x_1 + 4x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$ "

تذكرة :

حل جملة معادلات خطية :

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية حيث لدينا n متحول و m معادلة كالتالي :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\text{-----------------------------}$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m$$

* لحل هذه الجملة نميز الحالات الثلاثة التالية :

الحالة الأولى : اذا كان عدد المتحولات n يساوي عدد المعادلات m اي $m=n$

فإننا نتبع مايلي : نحسب قيمة المحدد $|A|$ حيث $|A|$ محدد الامثال وهنا نميز مايلي :

* $|A| \neq 0$ فإن للجملة حل وحيد وهو عبارة عن $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

* $|A| = 0$ وإذا كانت جميع المحددات Δx_j ; $j=\overline{1,n}$ مغايرة للصفر فالجملة مستحيلة الحل.

" حيث Δx_j هي المحددات الناتجة عن المصفوفة A باستبدال العمود j بالعمود b_i " .

وإذا كانت جميع المحددات Δx_j ; $j=\overline{1,n}$ اصفار فالجملة عدد لا نهائي من الحلول.

الحالة الثانية: اذا كان عدد المتحولات n اقل من عدد المعادلات m فعندئذ نأخذ معادلات بعدد المتحولات n ، ونقوم بالحل مثل الحالة الأولى .

الحالة الثالثة : اذا كان عدد المتحولات n أكبر من عدد المعادلات m . اي $n > m$.

نأخذ عدد من المتحولات قدره $n-m$ ، ونعطيه قيماً اختيارية بحيث نحصل على جملة عدد معادلاتها يساوي عدد المتحولات فنحل كما في الحالة الأولى.

ولكن المشكلة التي تواجهنا ما هي المتحولات التي نعطيها حرية .

فقد تم الاتفاق على اعطاء المتحولات الحرة القيمة صفر . وذلك لسهولة الحل .

اذاً اصبح لدينا المتحولات في الجملة ~~xxxxx~~ هي : $(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$

بحيث تسمى المتحولات $x_1, x_2, \ldots, x_m$ بالمتحولات القاعدية (القاعدة عدد متحولاتها = عدد المعادلات).
و المتحولات $x_{m+1}, \ldots, x_n$ بالمتحولات اللاقاعدية أو الحرة.

• الآن بفرض أن المتحولات $x_{m+1}, \ldots, x_n$ جميعها أصفار وتم وجدنا أثناء الحل أحد المتحولات $x_1, \ldots, x_m$ مساوياً للصفر عندئذ ندعو الحل بـ الحل المنحل.

* إن عدد الحلول القاعدية الممكنة (أي الخيارات التي يمكن أن نختارها) هو

$$C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

مثال لأجل $n=3$, $m=2$.
فإن عدد الحلول الممكنة هو 3 .

* **تعريف الحل المنحل القاعدي**: إذا كان أحد المتحولات القاعدية معدوماً إضافة إلى المتحولات الحرة فإننا نسمي الحل بالحل القاعدي المنحل أو غير السالم.

* **اختيار الحلول القاعدية**: لاختيار الحلول القاعدية أمامنا اتباع طريقة غاوص أو اتباع طريقة Simplex

① **مثال**: إذا كانت لدينا الجملة $m=2, n=3$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

نجد أن عدد الحلول القاعدية هي 3 .

والحلول هي: $(x_1, 0, x_3)$, $(0, x_2, x_3)$ و $(x_1, x_2, 0)$

من أجل الحصول على الحل الأول نختار هنا الحلول القاعدية هي x_1, x_2 ونسب بدلالة x_3 .
وبالمثل لأجل الحلين الثانيين $[x_2, x_3$ بدلالة $x_1]$ $[x_1, x_3$ بدلالة $x_2]$.

② **مثال**:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ 5x_1 - x_3 = 15 \end{cases}$$

نجد الحلول بالحساب هي $(3,0,0)$, $(3,0,0)$, $(0,-39,-15)$
$x_3 = 0$, $x_2 = 0$
حلين منحلين.

لو طلب بالمسألة إيجاد الحلول القاعدية غير السالبة نقوم بعزل الحلول السالبة بعد إيجادها كما في المثال الثاني.

Finished Lecture...