15/4/2015 المحاضرة /١٧/ عملي

أمثلة عن الفضاءات المترية :

/1/ $X = \mathbb{R}$ والتابع

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d(x,y) = |x-y| \quad , \forall\, x,y \in X$$

اثبت أن d مسافة وأن (X,d) فضاء متري.

الحل :

ليكن $x,y,z \in X$ عندئذٍ :

1) $d(x,y) = |x-y| \geq 0$

2) $d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0$

$\iff x-y = 0$

$\iff x = y$

3) $d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |y-x|$

$= d(y,x)$

4) $d(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)|$

$\leq |x-y| + |y-z|$

$= d(x,y) + d(y,z)$

ومنه فإن d مسافة على X والثنائية (X,d) فضاء متري.

/2/ $X = \mathbb{R}^2$ والتابع

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, x_2) \ , \ y = (y_1, y_2)$$

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

اثبت أن (X,d) فضاء متري

- بيّن صحة 3 من $n=2$.

/3/ $X=\mathbb{R}^n$

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\ ,\ y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$$

$$\Rightarrow \quad d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

اثبت أن (X,d) فضاء متري .

الحل:

① $d(x,y)\geq 0$

② $d(x,y)=0 \iff \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=0$

$$\iff \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=0$$

$$\iff (x_i-y_i)^2=0 \quad i=1,\dots,n$$

$$\iff x_i-y_i=0 \quad i=1,\dots,n$$

$$\iff x_i=y_i \quad i=1,\dots,n \iff x=y$$

③ $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=d(y,x)$$

④ متراجحة المثلث

نعتمد على متراجحة كوشي شفارتز

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$; $i=1,\dots,n$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

ومتراجحة مكوفسكي

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

متراجحة مكوفسكي تنتج من متراجحة كوشي شفارتز

- إثبات متراجحة كوشي شفارتز

$$0 \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

$$= \sum_{1\leq i,j\leq n} (a_i^2 b_j^2 - 2 a_i b_j a_j b_i + a_j^2 b_i^2)$$

$$= \sum_{1\leq i,j\leq n} a_i^2 b_j^2 - 2 \sum_{1\leq i,j\leq n} a_i b_i a_j b_j + \sum_{1\leq i,j\leq n} a_j^2 b_i^2$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) b_j^2\right) - 2\left(\sum_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{1\leq i\leq n} a_i b_i\right)(a_j b_j)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right) b_i^2\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

$$0 \leq 2\left(\sum_{1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{1}^{n} b_j^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

$\Rightarrow$ متراجحة كوشي شفارتز تنتج بسهولة

بالعودة لتحقيق الشرط الثالث

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2}$$

$a_i = x_i - z_i$

$b_i = y_i - z_i$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2}$$

$$= d(x,z) + d(z,y)$$

إذن (X,d) فضاء متري

/4/ $X = \mathbb{R}^n$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

المطلوب اثبات (X, d_1) فضاء متري

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$

① $d_1 \geq 0$

② $d_1(x,y) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0$

$$\iff |x_i - y_i| = 0 \ , i = 1, \ldots n$$

$$\iff x_i - y_i = 0 \ , i = 1, \ldots n$$

$$\iff x_i = y_i \ , i = 1, \ldots n$$

$$\iff x = y$$

③ $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |-(y_i - x_i)|$

$$= \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|$$

$$= d_1(y,x)$$

④ $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

$x, y, z = (z_1, \ldots, z_n)$

$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)|$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i - z_i| + |z_i - y_i| \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|$$

$$= d_1(x,z) + d_1(z,y)$$

إذن (X, d) فضاء متري

/5/ $X = \mathbb{R}^n$

$$d_\infty : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

أثبت أن (X, d_∞) فضاء متري

الحل:

① $d_\infty(x,y) \geq 0$

② $d_\infty(x,y) = 0 \iff \max |x_i - y_i| = 0$

$$\iff \underset{i=1,\dots,n}{|x_i - y_i| = 0}$$

$$\iff \underset{i=1,\dots,n}{x_i - y_i = 0}$$

$$\iff x_i = y_i \quad , i = 1, \dots, n$$

$$\iff x = y$$

③ $d_\infty(x,y) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$

$= \max\limits_{1\leq i\leq n} |y_i - x_i|$

$= d_\infty(y,x)$

④ $x, y, z \in X$

$\forall j \in \{1, \_\_ n\}$

$|x_j - y_j| = |(x_j - z_j) + (z_j + y_j)|$

$\leq |x_j - z_j| + |z_j - y_j|$

$\leq \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - z_i| + \max\limits_{1\leq i\leq n} |z_i - y_i|$

$= d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y)$

$|x_j - y_j| \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y)$
$\{j \in 1, \_\_ n\}$

$d_\infty(x,y) = \max\limits_{1\leq j\leq n} |x_j - y_j| \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y)$

اذن d_∞ مسافة على X و (X, d_∞) فضاء متري

---

* المترية التافهة :

① $X \neq \phi$ مجموعة ما

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

أثبت أن (X, d) فضاء متري

② $X = B[a,b]$ مجموعة كل التوابع الحقيقية المحدودة على المجال $[a,b]$ في $\mathbb{R}$ ، والتابع

$$d(x,y) = \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|$$

$x, y \in X$

أثبت أن (X, d) فضاء متري

③ $X = C[a,b]$ مجموعة كل التوابع المستمرة في $[a,b]$ في $\mathbb{R}$

$$d(x,y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|$$

أثبت أن (X, d) فضاء متري

④ d مسافة في مجموعة $X \neq \phi$

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

$$d_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$$

$$d_3(x,y) = K\, d(x,y) \quad (0 < K \in \mathbb{R})$$

أثبت أن (X, d_1) ، (X, d_2) ، (X, d_3) فضاءات مترية

ارتيحت