الفصل الأول : حلقة كثيرات الحدود :

تعريف :

بفرض K حقل ما عندئذٍ نعرف الحدودي بالمتحولات $x_n, \dots, x_1$ من الحقل K « monomial »

بأنه جداء من الشكل : $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ حيث $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{N}$

وللاختصار نكتب هذا الجداء بالشكل x^α حيث (ليس للحدودي معاملات)

$$x = (x_1, \dots x_n) \quad , \quad \alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$$

كما نعرف درجة الحدودية x^α كما يلي :

$$\deg(x^\alpha) = \alpha_1 + \dots \alpha_n$$ (درجة الحد الثابت صفر).

مثال :

بفرض $x^\alpha = x_1^5 x_2^3 x_3^{10}$ فإن $\deg(x^\alpha) = 5+3+10 = 18$

ملاحظة :

في هذه الدراسة سوف نفرض K حقل دوماً. وغالباً ما نختار $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$

تعريف : (poly متعدد)

نعرف كثير الحدود « polynomial » بأنه تركيب خطي منته من الحدوديات من الشكل

$$f(x) = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \; ; \; c_\alpha \in K$$

ندعو c_α بالأمثال وهي تتبع درجة الحدودية x^α كما نرمز لمجموعة كثيرات الحدود بالمتحول $x = (x_1, \dots x_n)$ بالرمز $K[x] = K[x_1, \dots x_n]$ حيث أنه تشكل بالإضافة إلى عمليتي الجمع والضرب « الجمع وضرب كثيرات الحدود » حلقة تبديلية.

واحدية تسمى حلقة كثيرات الحدود. إلا أن $K[x]$ ليس حقل لأنه

ليس لكل كثير حدود مقلوب ولكن يمكننا أن نبني حقل على الشكل التالي

$$K(x) = K(x_1, \dots x_n) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \; ; \; f(x), g(x) \in K[x] \; , \; g(x) \neq 0 \right\}$$

يسمى حقل خارج القسمة.

تعريف:

بفرض $f_1,\dots f_s \in K[x_1,\dots x_n]$ عندئذ نعرف المجموعة

$\langle f_1,\dots, f_s\rangle = \{p_1 f_1+\dots+p_s f_s \;;\; p_1\dots p_s \in K[x_1,\dots x_n]\}$ ونقول في هذه الحالة

أن $\langle f_1,\dots f_s\rangle$ مولدة بـ $f_1,\dots f_1$

ملاحظة:

1- $0=0f_1+\dots+0f_s$ ومنه $0\in\langle f_1,\dots f_s\rangle$

2- $\langle f_1,\dots f_s\rangle$ مغلقة بالنسبة للجمع في $K[x_1,\dots x_n]$ أي

$$\forall f,g \in \langle f_1,\dots f_s\rangle \Longrightarrow f+g \in \langle f_1,\dots f_s\rangle$$

3- $$\forall f\in\langle f_1,\dots f_s\rangle,\ p\in K[x_1,\dots x_n] \Longrightarrow p.f \in \langle f_1,\dots f_s\rangle$$

وهذا يعني أن $\langle f_1,\dots f_s\rangle$ مثالي في حلقة كثيرات الحدود $K[x_1,\dots x_n]$

ندعوه المثالي المولد بـ $f_1,\dots,f_s$ وهو أصغر مثالي يحوي $f_1,\dots f_s$ في الحلقة $K[x_1,\dots x_n]$.

تمارين:

$\boxed{1}$ بفرض $f=x^2,\ f_1=x-y^2,\ f_2=xy\in\mathbb{R}[x,y]$ $K=\mathbb{R}$

أثبت أن $f\in\langle f_1,f_2\rangle$

الحل:

نلاحظ أن $x(x-y^2)+y(xy) = xf_1+yf_2 = x^2 = f$

ومنه $f\in\langle f_1,f_2\rangle$

$\boxed{2}$ بفرض $f=3x^2y+x^2,\ f_1=x+y^2,\ f_2=xy^3,\ f_3=y+1 \in \mathbb{R}[x,y]$

أثبت أن $f\in\langle f_1,f_2,f_3\rangle$

الحل: نلاحظ أنه

$$2xy f_1 - 2 f_2 + x^2 f_3$$
$$= 2xy(x+y^2) - 2(xy^3) + x^2(y+1)$$
$$= 2x^2y + \cancel{2xy^3} - \cancel{2xy^3} + x^2y + x^2 = 3xy^2 + x^2$$

ومنه $f \in \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$

$\boxed{3}$: نفرض $I_1 = \langle x-y^2, xy, y^2 \rangle$, $I_2 = \langle x, y^2 \rangle \subset \mathbb{R}[x,y]$

أثبت أنه $I_1 = I_2$.

الحل:

[الأفضل أن نستخدم الرمز $\subset$ للاحتواء وليس $\subseteq$]

نفرض $f \in I_1$ عندئذ،

$$f = p_1(x-y^2) + p_2(xy) + p_3(y^2)$$
$$(p_1 + p_2 y)x + (-p_1 + p_3)y^2 \in I_2 \implies I_1 \subset I_2$$

عندئذ $f \in I_2$

$$f = p_1 x + p_2 y^2 + p_1 y^2 - p_1 y^2$$
$$= p_1(x-y^2) + (p_1+p_2)y^2 + 0xy \in I_1$$
$$\implies I_2 \subset I_1$$

ومنه $I_1 = I_2$

$\boxed{4}$ أثبت أنه $\langle x-y^2, xy \rangle \neq \langle x^2, xy \rangle$

الحل:

نلاحظ أنه $y^3 = -y(x-y^2) + xy \in \langle x-y^2, xy \rangle$ بالإ أنه $y^3 \notin \langle x^2, xy \rangle$ وضوحاً

ومنه

$$I_1 \neq I_2$$

وظيفة (1-1).

بفرض $f = x+y+z,\ f_1 = xyz+1,\ f_2 = x^2y + xy^2 - 1 \in \mathbb{R}[x,y,z]$

أثبت أنه $f \in \langle f_1, f_2 \rangle$

انتهت المحاضرة الأولى.

حل الوظيفة: (1-1)

بالترتيب نجد أنه: لو أخذنا $p_1 = x+y$ & $p_2 = -z \in \mathbb{R}[x,y,z]$ لوجدنا

$$p_1 f_1 + p_2 f_2 = x+y\,(xyz+1) - z(x^2y+xy^2-1)$$

$$= x^2yz + xy^2z + x + y - zx^2y - xy^2z + z$$

$$= x+y+z = f \Longrightarrow$$

$$f \in \langle f_1, f_2 \rangle.$$

— Rehab