/ /

نمذجة رياضية

المحاضرة السابعة

٣١/٣/٢٠١٥م

نظريات حول الترافق:

1) إن النموذج المرافق للنموذج المرافق هو النموذج الأصلي نفسه.

2) إذا كان $x_1, x_2, \ldots, x_n$ حلاً مقبولاً للنموذج الأصلي
وكان $y_1, y_2, \ldots, y_m$ حلاً مقبولاً للنموذج المرافق
فإن قيمة تابع الهدف للنموذج الأصلي لا تتجاوز قيمة في تابع الهدف بالنسبة للمرافق
عند هذين الحلين، أي:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

وذلك من أجل جميع الحلول المقبولة بما فيها الحل الأمثل.
(عند الحل الأمثل تتحقق المساواة).

3) إذا كان تابع الهدف في أحد النموذجين المترافقين غير محدود (ليس له حل أمثل)
فإن النموذج الآخر يكون غير قابل للحل.

4) إذا كان لأحد النموذجين المترافقين حل مثالي فإن للنموذج الآخر حل مثالي، وتكون
قيمة تابعي الهدف متساويتين:

$$Max\ Z = Min\ L$$

5 نظرية الترافق: هامة

الشرط اللازم والكافي ليكون الحلان: $x'_1, \ldots, x'_n$

$y'_1, \ldots, y'_m$

حلين مثاليين للنموذج الأصلي ومرافقه هو أن تكون قيمتا تابعي الهدف لهما متساويتان، وأن يتحقق الشرطان:

$$① \quad x'_j \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y'_i - C_j}_{\text{قيود المرافق}} \Big) = 0 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

$$② \quad y'_i \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j - b_i}_{\text{قيود الأصلي}} \Big) = 0 \quad ; \quad i = \overline{1,m}$$

هذا يعني أنه يلزم ويكفي أن يكون أحد العاملين في كل من الجداءين ① و ② مساوياً للصفر.

وبعبارة أخرى: إذا كانت قيمة إحدى مركبات الحل الأمثل $x'_j \neq 0$ في النموذج الأصلي فإن الحل الأمثل للنموذج المرافق يجعل المتراجحة المقابلة لذلك المتحول مساواة تامة.

بعبارة أخرى:

$$x'_j \neq 0 \Rightarrow a_{1j} y'_1 + a_{2j} y'_2 + \cdots + a_{mj} y'_m = C_j \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

$$y'_i \neq 0 \Rightarrow a_{i1} x'_1 + a_{i2} x'_2 + \cdots + a_{in} x'_n = b_i \quad ; \quad i = \overline{1,m}$$

المضمون الاقتصادي للبرنامج المرافق:

نوضحه من خلال التمرين التالي:

تمرين: تنتج إحدى الشركات نوعين من المنتجات A_1, A_2
وتستخدم لذلك نوعين من المواد الأولية B_1, B_2
وإن المقادير اللازمة من هاتين المادتين لإنتاج واحدة من كل من المنتجين A_1, A_2 والكمية الاحتياطية المتوفرة منها، وسعر المبيع لكل من A_1, A_2 مبينة بالجدول التالي:

المنتجات / المواد الأولية	A_1	A_2	الكميات المتوفرة
B_1	2	1	6
B_2	6	9	36
C_j	100	80	

1) أوجد الخطة الإنتاجية المثالية التي تجعل قيمة منتجات هذه الشركة (سعر المبيع) أكبر ما يمكن.
(هذا الطلب يعني أنه تطلب منا حل النموذج، لذلك نعدّله ونجعل المطلوب: صياغة النموذج الرياضي الذي تجعل قيمة منتجات الشركة أكبر ما يمكن)

2) أوجد النموذج المرافق.

3) إذا كان الحل المثالي للنموذج الأصلي:

$x_1' = 1.5 \quad , \quad x_2' = 3 \quad , \quad Z = 390$

أوجد الحل المثالي للنموذج المرافق

4) ما المضمون الاقتصادي للبرنامج الأصلي والبرنامج المرافق؟

5) ما العلاقة بين الحلين؟

الحل:

1) نفرض x_1 الكمية المنتجة من A_1

و x_2 الكمية المنتجة من A_2

عندئذٍ تابع الهدف: $Z = 100x_1 + 80x_2 \longrightarrow Max$

ضمن الشروط:

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$6x_1 + 9x_2 \leq 36$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2) النموذج المرافق: $L = 6y_1 + 36y_2 \longrightarrow Min$

$$2y_1 + 6y_2 \geq 100$$

$$y_1 + 9y_2 \geq 80$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

3.
$$x_1' = 1.5 \neq 0 \implies 2y_1' + 6y_2' = 100$$

$$x_2' = 3 \neq 0 \implies y_1' + 9y_2' = 80$$

بالحل المشترك نجد:

$$y_1' = 35 \quad , \quad y_2' = 5$$

وقيمة دالة الهدف نفسها 390.

4) إن متحولات تابع الهدف في البرنامج الأصلي هي كميتي الإنتاج x_1, x_2 من المنتجات A_1, A_2 ، وإن هذه الكميات مضروبة بالأسعار تعطينا قيمة المنتجات.

إن متحولات تابع الهدف في البرنامج المرافق هي عبارة عن الأسعار y_1, y_2 لواحدة المواد الأولية B_1, B_2 ، مضروبة بالكميات المتوفرة لدينا تعطينا قيمة المواد المتوفرة.

لذلك نسمي هذه المتحولات y_1, y_2 بالأسعار السرية (أسعار الظل)

- إن المتراجحة الأولى في النموذج المرافق تعني أن قيمة ما يلزم من المواد الأولية لصناعة واحدة من المنتج A_1 لا يمكن أن تقل عن سعر الوحدة الواحدة من هذا المنتج.

أي أن $2y_1 + 6y_2$ تعبر عن تكلفة وحدة واحدة من المنتج A_1
ولدينا سعر الوحدة الواحدة من المنتج A_1 هي 100، ولكن نحتاج لإنتاج أكثر من وحدة واحدة من المنتج A_1، لذلك يجب أن تكون التكلفة أكبر أو تساوي تكلفة الوحدة الواحدة بأسوأ الحالات.

- وكذلك فالمتراجحة الثانية في النموذج المرافق تعني أن قيمة ما يلزم من المواد الأولية لصناعة واحدة من المنتج A_2 لا يمكن أن تقل عن سعر الوحدة الواحدة من هذا المنتج.

5) إن النموذج الأصلي يعطينا أفضل خطة للإنتاج التي تجعل قيمة ذلك الإنتاج أكبر ما يمكن

والحل المثالي للنموذج المرافق يعطينا أفضل تشكيلة لأسعار المواد الأولية

حيث: $\mathrm{Max}\, Z = \mathrm{Min}\, L$

توضيح: الحل المثالي للبرنامج المرافق يمثل الحد الأعلى لسعر المواد الأولية، بحيث أنه إذا تجاوزنا هذا السعر سواء y_1 أو y_2 فإننا نقع في خسارة.
وإذا اشترينا هذه المواد الأولية بنفس الأسعار نكون في وضع لا ربح ولا خسارة.

انتهت المحاضرة السابعة

:)