ثانياً: الوسطاء الحقيقية هي دوال اختيارية

① العلاقة الجبرية تحوي على دالة اختيارية واحدة متعلقة بدالة معلومة من الشكل

$$F(x,y,z,g(u))=0 \quad , \quad z=z(x,y)$$

عندما نشتق ~~مرتين~~ مرة بالنسبة لـ x ومرة بالنسبة لـ y ثم نحذف الدالة $g(u)$ من المعادلات ..

Example:

اوجد المعادلة التفاضلية الجزئية من العلاقة الجبرية التالية

$$x^2+y^2+z^2=g(2x+y)$$

نشتق بالنسبة لـ x : $2x+2zp=2g'$ --- ①

" " لـ y : $2y+2zq=g'$ --- ②

من ① نجد $x+zp=g'$ --- ③

بالمساواة بين (2) و (3) نجد

$$2y+2zq=x+zp$$

$$2y-x+(2q-p)z=0$$

② العلاقة الجبرية تحوي على دالتين اختياريتين كلاهما متعلقان بدوال معلومة أي

$$Z=f(u)+g(v)$$

عندئذٍ: نشتق مرتين بالنسبة لـ x

" " " لـ y

ونحذف الدوال من المعادلات

Example:

اوجد المعادلة التفاضلية الجزئية من العلاقة الجبرية التالية

$$Z=f(x+cy)+g(x-cy)$$

مشتقة كلية لان F معقدة

$$u=x+cy \quad , \quad v=x-cy$$

نشتق بالنسبة لـ x نجد : $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dF}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dg}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=(1)\cdot f'=f'$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{dg}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=(1)\cdot g'=g'$$

$$\Longrightarrow p=f'+g'$$

نشتق ثاني مرة بالنسبة لـ x

$$r = f'' + g'' \quad \ldots\ldots (*)$$

نشتق بالنسبة لـ y

$$q = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$q = cf' - cg' \quad \ldots (2)$$

نشتق مرة ثانية بالنسبة لـ y

$$t = c^2 f'' + c^2 g'' \quad \ldots (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد

$$\boxed{t = c^2 r}$$ وهي معادلة عامة حركة الوتر

وهي نفسي :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

و

$$r = \frac{1}{c^2} t = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ج) اذا كانت العلاقة الجبرية تحوي دالة تتعلق بدالتين معلومتين اي من الشكل :

$$\cancel{z} = F(u, v) = 0$$

حيث F اختيارية و u و v معلومتين عندئذ

نشتق (مرة / مرتين) بالنسبة لـ x

" " " بالنسبة لـ y

Example: $F(x^2+y^2, z)$

$$u = x^2+y^2 \quad , \quad v = z$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} 2x + p \cdot \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} 2y + q \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

حتى يكون هناك حل يجب أن يكون محدد الأمثال يساوي الـ (0)

بفرض : $\frac{\partial F}{\partial u} = N$ ، $\frac{\partial F}{\partial v} = M$

$2xN + pM = 0$

$2yN + qM = 0$

$$\begin{vmatrix} 2x & p \\ 2y & q \end{vmatrix} = 0$$

$\boxed{2xq - 2yp = 0}$ معادلة تفاضلية جزئية خطية

• المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى

$F(x, y, z, p, q) = 0$ ---- (1)

الحل التام لـ (1) هو كل حل يحتوي على عدد من الثوابت الاختيارية يساوي عدد المتغيرات المستقلة وهو من الشكل : $f(x, y, z, c_1, c_2) = 0$ ---- (2)

وهو يمثل عدد لانهائي من السطوح التكاملية لـ (1)

والتي تختلف فيما بينها بقيم الثوابت c_1 و c_2

إذا بالحل التام لم نعوضها الحل العام يمثل P و ثوابت c_1 و c_2 مفقود

تعريف المغلف : هو المنحني الذي يمس كل نقطة من نقاطه أحد السطوح التكاملية

تعريف الحل الشاذ : بفرض أن (2) هو الحل التام لـ (1) عندئذٍ إذا كان هناك مغلفاً في هذه السطوح معادلته تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية (1) عندها نسميها معادلة المغلف إن وجد بالحل الشاذ للمعادلة (1)

طريقة إيجاد معادلة المغلف „الحل الشاذ إن وجد„

1_ نشتق عبارة الحل التام بالنسبة للثوابت

2_ نحذف الثوابت من العلاقات الناتجة وعبارة الحل التام

3_ نسمي بالتعريف السطوح الناتجة المحققة للمعادلة (1) بالحل الشاذ للمعادلة التفا

Examp

اوجد المغلفات ((الحلول الشاذة إن وجدت))

$$z = px + qy - p^2 - q^2 \quad \ldots ①$$

اذا علمت ان الحل التام هو

$$z = ax + by - a^2 - b^2 \quad \ldots ②$$

نشتق بالنسبة للثوابت a أولاً ((نشتق المعادلة ②))

$$0 = x - 2a \Rightarrow a = \frac{x}{2}$$

بالنسبة لـ b

$$0 = y - 2b \Rightarrow b = \frac{y}{2}$$

نعوض بـ ②:

$$z = \frac{x}{2} \cdot x + \frac{y}{2} \cdot y - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$$

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$$ معادلة المغلف

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$$

لنوجد p نشتق z بالنسبة لـ x

$$p = \frac{1}{2} x$$

ولنوجد q نشتق z بالنسبة لـ y

$$q = \frac{1}{2} y$$

نعوض بـ ①

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \overset{?}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$$ محققة

ومنه معادلة المغلف

هي الحل الشاذ

المعادلات التفاضلية التي تعالج كمعادلات تفاضلية عادية . مثال

① إذا كانت المعادلة التفاضلية الجزئية لا تحوي سوى المشتقات الجزئية لأحد المتغيرين ، يمكن اعتبار المتغير الآخر وسيطاً ثابتاً وتكون ثوابت التكامل دوالاً كيفية

" أي إذا كانت المعادلة تحوي p و r أو أحدهما أو q و t أو أحدهما حسب تكامل عادي وعوض الثابت نضع دالة تابعة للمتغير الآخر

② يمكن معالجة بعض المعادلات الجزئية بعملية التكامل بالنسبة لأحد المتغيرين أولاً ثم بعملية تكامل بالنسبة للمتغير الثاني على أن نأخذ في كل حالة ثابت التكامل هو دالة كيفية في المتغير الآخر

Exampel

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \xrightarrow{\text{تكامل}} z = \varphi(y)$$

دالة بدال الثابت التكامل

لأن ده تابعة لـ y لأن $\frac{\partial z}{\partial x}$ أي كاملنا بالنسبة لـ x

6 Sunday

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$z = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Rightarrow z = \varphi(y)x + \varphi_1(y)$$

لأن هو سيكون $z = cx + c_1$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow z = \varphi(x)y + \varphi_1(x)$$

① $q = t \Rightarrow \frac{t}{q} = 1 \Rightarrow z = \varphi(x)e^y + \varphi_1(x)$

$p = r$

$$\Rightarrow \frac{r}{p} = 1 \Rightarrow z = \varphi(y)e^x + \varphi_1(y)$$

طريقة حساب ①

$$\frac{t}{q} = 1$$

تكامل

$\ln|q| = y + \varphi(x)$ ← حسب t مشتقة q

$$q = e^y \cdot \underbrace{e^{\varphi(x)}}_{\text{ثابت}}$$

$e^{\varphi(x)}$ ثم نبدله بـ $\varphi(x)$

$q = e^y \varphi(x)$

تكامل

$$\boxed{z = \varphi_1(x)e^y + \varphi_1(x)}$$