المحاضرة الخامسة

29/3/2015

النوع الأول: نموذج نقل بأقل تكلفة. يميزنا حالتين:

الحالة الأولى: نموذج مغلق عندما تكون $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ وهو سابقاً.

الحالة الثانية: نموذج مفتوح عندما تكون $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$

⬅ وفي هذه الحالة أيضاً نميز حالتين

⊛ عجز في الانتاج: أي: $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

في هذه الحالة نضيف مركز انتاجي وهمي طاقته الانتاجية هي الفرق بين المجموعتين

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i = a_{m+1} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m+1} a_i$$

عندئذ نحول النموذج إلى نموذج متوازن حيث هنا نفرض أن تكلفة النقل من المركز الانتاجي الوهمي الذي أضفناه الى جميع المراكز الاستهلاكية تساوي الصفر عندئذ يصبح النموذج الرياضي على الشكل التالي:

يمكن أن نتكلم عن الهدف

$$L = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط:

يفضل أن نكتب بالتفصيل

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad ; \quad i = \overline{1, m+1}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j \quad ; \quad j = \overline{1, n}$$

بالإضافة لشروط عدم السلبية.

⊛ فائض في الانتاج: أي: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

في هذه الحالة نضيف مركز استهلاكي وهمي حاجته هي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$$

وبالتالي يصبح النموذج الرياضي بالشكل:

$$L = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad ; \quad j = \overline{1, n+1}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad ; \quad i = \overline{1, m}$$

وشروط عدم السلبية.

★ تمرين : نريد نقل 5 أطنان من المعمل A و ثلاثة أطنان من المعمل B الى ثلاثة مدن c, d, e حاجاتهم على الترتيب 4, 2, 3 أطنان أوجد الرحلة المثالية من حيث التكلفة بفرض ان مراكز الاستقلال علماً أن مصفوفة التكاليف c_{ij} تعطى كمايلي:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

مسألة: لدينا 5 مشاريع تتزود بالمواد من ثلاث مصانع حيث ترمز للمشاريع $B_1, B_2, \dots, B_5$ و للمصانع A_1, A_2, A_3 حيث ان الطاقة الانتاجية لهذه المصانع هي 130, 120, 110 وحاجة كل من المشاريع على الترتيب 100, 40, 60, 80, 90 وكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع i الى المشروع j معطاة بالجدول التالي :

المشاريع / المصانع	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الطاقة الانتاجية
A_1	4	1	3	6	9	130
A_2	5	2	6	4	8	120
A_3	6	4	2	5	7	110
A_4	0	0	0	0	0	10
الكميات المطلوبة	90	80	60	40	100	370 / 360

المطلوب : صياغة نموذج رياضي حيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن .

الحل: نلاحظ ان : « مجموع الكميات المنقولة = الكميات المستهلكة »

$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 370 \quad , \quad \sum_{i=1}^{3} a_i = 360$$

وبما ان الطاقة الانتاجية اقل من الكميات المطلوبة اذا يوجد عجز في الانتاج

$$\sum_{j=1}^{5} b_j > \sum_{i=1}^{3} a_i$$

اولا نقوم بحساب كمية العجز : كمايلي :

$$\sum_{j=1}^{5} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 10$$

لذلك نضيف مركز انتاجي وهمي طاقته الانتاجية 10 .

ونقوم باختيار من الجدول اسم المصنع A_1 حيث تكون تكلفة النقل 0 كي لا يؤثر على تابع الهدف .

ومنه يكون النموذج الرياضي بالشكل: (في حالة تابع الهدف بالتقليل)

$$L = 4x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 6x_{14} + 9x_{15} + 5x_{21} + 2x_{22} + 6x_{23} + 4x_{24} + 8x_{25} + 6x_{31} + 4x_{32} + 2x_{33} + 5x_{34} + 7x_{35} + 0$$

التكلفة A_i صفر.

$$\Rightarrow L = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} \longrightarrow Min$$

حيث الشروط:

* شروط التحقيق = الكمية الموزعة.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15} = 130 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25} = 120 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35} = 100 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = a_i \quad ; \quad i = \overline{1,4}$$

* $\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = b_j \quad ; \quad j = \overline{1,5}$ ⇔

شروط الكمية المطلوبة.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} = 90 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} = 80 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} = 60 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} = 40 \\ x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45} = 100 \end{cases}$$

* شروط عدم السلبية $x_{ij} \geq 0$ حيث $j = \overline{1,5}$ ، $i = \overline{1,4}$

* يمكن المحاولة في المسألة السابقة وذلك بتغير معطيات المسألة لجعله نموذج متوازن تارة وغائبها انتاج تارة اخرى.

النماذج المرافقة:

مقدمة: البرامج الخطية المترافقة: إن كل برنامج يمتلك برنامج مرافق بحيث انه اذا وجد حلا لاحد البرنامجين فان هذا الحل للآخر حيث تتساوى قيمة تابع الهدف للبرنامجين عند الحل الامثل وقد تكون الحاجة لايجاد البرنامج المرافق ضرورية في العديد من المسائل.

وخاصة الحالة التي يكون فيها عدد المتغيرات n > عدد الشروط m.

تشكيل البرنامج المرافق: لنفرض انه لدينا برنامج خطي يتكون من تابع الهدف في صورته نسميه البرنامج الاصلي وياخذ الشكل التالي:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \longrightarrow Max$$

حيث الشروط: II ;

$$\begin{array}{l|l} y_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ y_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}$$

ALADDIN.net

[2] $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$ حيث

إن البرنامج المرافق للبرنامج السابق هو :

$$L = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط :

[1]
$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m \geq c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{m2} y_m \geq c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{mn} y_m \geq c_n \end{cases}$$

[2] $y_i \geq 0$ حيث $i = \overline{1,m}$

طريقة بناء البرنامج المرافق :

[1] اذا كان تابع الهدف في البرنامج الاصلي بصورة تعظيم (تقليل) فإن تابع الهدف في المرافقة تقليل (تعظيم)

[2] يقابل كل شرط أو قيد في البرنامج الاصلي متغير في البرنامج المرافق .

يقابل كل شرط أو قيد في البرنامج المرافقة متغير في البرنامج الاصلي .

[3] اذا كانت توابع الهدف في البرنامجين بصورة تعظيم فإن القيود تكون بصورة $\leq$ (اصغر او يساوي)

" " " " " تقليل " " " " $\geq$ (اكبر او يساوي)

[4] معاملات تابع الهدف في البرنامج المرافقة هي قيم الطرف الايمن لشروط البرنامج الاصلي .

وقيم الطرف الايمن في شروط البرنامج المرافقة هي معاملات تابع الهدف في البرنامج الاصلي .

[5] اذا كان عدد القيود m وعدد المتحولات n في البرنامج الاصلي فإن عدد القيود يصبح n والمتحولات m في المرافقة

[6] معاملات المتحولات في الشروط للبرنامج المرافقة هي تفسخ معاملات المتحولات للشروط في البرنامج الاصلي مع تبديل معاملات الاسطر والاعمدة

هذا يعني ان معاملات السطر i في الشروط المقيدة في البرنامج الاصلي هي تفكك معاملات العمود i للشروط المقيدة في البرنامج المرافقة .

Finished Lectare...

ALADDIN net