الحل للمسألة العاشرة ١١/٤/٢٠٠٦ — يوم الثلاثاء

أوجد الحل العام لمسألة القيم الحدية باستخدام تحويلات لابلاس

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - k\sin\pi x$$

$$z(0,t) = z(1,t) = 0, \quad z(x,0) = z'(x,0) = 0 \qquad c>0,\ t>0$$

الحل: نأخذ تحويل لابلاس بالنسبة للمتحول t

$$L\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right] = \frac{1}{c^2} L\left[\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right] - L\left[k\sin\pi x\right]$$

$$\frac{\partial z(x,0)}{\partial t}$$

$$Z''(x,s) = \frac{1}{c^2}\left[s^2 Z(x,s) - s\,z(x,0) - z'(x,0)\right] - \frac{k}{s}\sin\pi x$$

$$Z''(x,s) = \frac{s^2}{c^2} Z(x,s) - \frac{k}{s}\sin\pi x$$

$$\boxed{Z''(x,s) - \frac{s^2}{c^2} Z(x,s) = \frac{-k}{s}\sin\pi x} \quad \text{—— ①}$$

نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة بدون طرف ثاني

$$\lambda^2 - \frac{s^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{s^2}{c^2} \Rightarrow \lambda_1 = +\frac{s}{c}, \quad \lambda_2 = \frac{-s}{c}$$

$$Z_1 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$Z_1 = c_1 e^{\frac{s}{c}x} + c_2 e^{-\frac{s}{c}x}$$

نوجد الحل الخاص

$$Z_2 = A\sin\pi x$$

$$Z_2' = A\pi\cos\pi x, \quad Z_2'' = -A\pi^2\sin\pi x$$

نعوض في ① نجد:

$$-A\pi^2\sin\pi x - \frac{s^2}{c^2}A\sin\pi x = \frac{-k}{s}\sin\pi x$$

$$-A\left(\pi^2 + \frac{s^2}{c^2}\right)\sin\pi x = \frac{-k}{s}\sin\pi x$$

$$\Rightarrow A = \frac{kc^2}{s(\pi^2c^2 + s^2)}$$

$$\Rightarrow Z_2 = \frac{kc^2}{s(\pi^2c^2 + s^2)}\sin\pi x$$

الحل العام: $$Z = C_1 e^{\frac{s}{c}x} + C_2 e^{-\frac{s}{c}x} + \frac{kc^2}{s(s^2+\pi^2c^2)} \sin\pi x \quad ②$$

للحصول على الثوابت C_1 و C_2 من الشروط الابتدائية

$$0 = z(0,t) \Longrightarrow Z(0,s) = \int_0^\infty z(0,t)\,dt = 0 \Longrightarrow \boxed{x=0}$$

نعوض في ② نجد:

$$Z(0,s) = C_1(1) + C_2(1) + \sin(0) = 0$$

$$= C_1 + C_2 = 0 \Longrightarrow C_1 = -C_2$$

من الشرط الثاني

$$0 = z(1,t) \Longrightarrow Z(1,s) = \int_0^\infty z(1,t)\,dt = 0 \Longrightarrow \boxed{x=1}$$

نعوض في ② نجد:

$$Z(1,s) = C_1 e^{\frac{s}{c}} + C_2 e^{-\frac{s}{c}}$$

$$= C_1 e^{\frac{s}{c}} - C_1 e^{-\frac{s}{c}}$$

$$= C_1 (e^{\frac{s}{c}} - e^{-\frac{s}{c}}) \qquad ; c>0 \text{ و } s>0$$

$$\Longrightarrow C_1 = 0 = C_2$$

$$\Longrightarrow \boxed{Z = \frac{kc^2}{s(s^2+\pi^2c^2)} \sin\pi x}$$

نفرق الكسور لـ $\frac{1}{s(s^2+\pi^2c^2)}$ ونلاحظ أن $$\frac{1}{s(s^2+\pi^2c^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+D}{s^2+\pi^2c^2}$$

نجد أن: $A = \frac{1}{c^2\pi^2}$ و $B = \frac{-1}{c^2\pi^2}$ و $D = 0$ نعود إلى المعادلة

$$Z = kc^2 \sin\pi x \left[\frac{A}{s} + \frac{Bs+D}{s^2+\pi^2c^2}\right]$$

$$= kc^2 \sin\pi x \frac{1}{\pi^2c^2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\pi^2c^2}\right]$$

$$L^{-1}[Z] = kc^2 \sin\pi x \frac{1}{\pi^2c^2}\left[L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\pi^2c^2}\right]\right]$$

$$z(x,t) = \frac{K^2}{\pi^2} \sin\pi x \left[1 - \cos\pi ct\right]$$

وهو المطلوب.....

المعادلات التفاضلية الجزئية "" استنباط معادلة تفاضلية جزئية من معادلة جبرية ""

ليكن $z(x,y)$. المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الاولى هي من الشكل

$$F(x,y,z,p,q)=0$$

المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية هي من الشكل

$$F(x,y,z,p,q,r,s,t)=0$$

حيث :

$$p=\frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y} \quad , \quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad , \quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

منشأ المعادلات التفاضلية الجزئية :

إن حذف الوسطاء الاختيارية في معادلة جبرية لعدة متغيرات يقود الى المعادلات التفاضلية الجزئية

أولاً : الوسطاء الكيفية هي ثوابت اختيارية

(1) العلاقة الجبرية تحوي على ثابت اختياري واحد $F(x,y,z,c)=0$

عندئذ يتم حذف الثابت من المعادلة $F(x,y,z,c)=0$ والمعادلة الناتجة عن اشتقاق

بالنسبة لـ x ستعطي $G_1(x,y,z,p)=0$

أو بالنسبة لـ y ستعطي $G_2(x,y,z,q)=0$

أو نحذف الثابت من المعادلتين G_1 و G_2

مثال: أوجد المعادلات التفاضلية الجزئية من العلاقة الجبرية $z=cxy$ ...(*)

الحل: نشتق بالنسبة لـ x نجد

$$\frac{\partial z}{\partial x}=cy \Rightarrow p=cy \Rightarrow c=\frac{p}{y}$$

نعوض بـ (*):

$$(1)\ldots\ z=\frac{p}{y}xy=px$$

نشتق بالنسبة لـ y نجد

$$\frac{\partial z}{\partial y}=cx \Rightarrow q=cx$$

$\Rightarrow c=\frac{q}{x}$ نعوض بـ (*) نجد

$$(2)\ldots\ z=\frac{q}{x}xy=qy$$

نحذف الثوابت من (1) و (2) نجد أن $C=C$

$$\frac{p}{y}=\frac{q}{x} \Rightarrow px=qy \ \ldots(3)$$

ملاحظة

المعادلات 1 و 2 و 3 الناتجة هي معادلات تفاضلية جزئية من الرتبة الاولى

(ثانياً) العلاقة الجبرية تحوي على ثابتين اختياريين $F(x,y,z,c_1,c_2)=0$

عندها: نشتق بالنسبة لـ x فينتج: $G_1(x,y,z,p)=0$

و " " لـ y " " : $G_2(x,y,z,q)=0$

وبحذف الثابتين من المعادلات نحصل على معادلة تفاضلية جزئية

مثال: أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية المشتقة من العلاقة الجبرية التالية

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+z^2=1 \quad \ldots (1)$$

نشتق بالنسبة لـ x : $2(x-c_1)+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$

$$2(x-c_1)+2zp=0 \Rightarrow (x-c_1)=-zp \quad — (2)$$

نشتق بالنسبة لـ y :

$$2(y-c_2)+2z\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$2(y-c_2)+2zq=0 \Rightarrow (y-c_2)=-zq \quad — (3)$$

نعوض 2 و 3 بـ 1 نجد

13 Sunday

$$(-zp)^2+(-zq)^2+z^2=1$$

المعادلة التفاضلية $(p^2+q^2+1)z^2=1$

(ثالثاً) المعادلة الجبرية تحوي على ثلاث ثوابت

$$F(x,y,z,c_1,c_2,c_3)=0$$

عندئذ: نشتق بالنسبة لـ x : $G_1(x,y,z,p)$

ثم " " لـ y : $G_2(x,y,z,q)$

" G_1 بالنسبة لـ x ثم G_2 بالنسبة لـ y

ثم نشتق G_1 أو G_2 بالنسبة للمجهول الآخر (إذا اشتققنا G_1 بالنسبة لـ x أولاً ثانياً تكون بالنسبة لـ y وهكذا)

Ex: $ax+by+cz=1$

نشتق بالنسبة لـ x : $a+cp=0$ — (2)

مشتق z بالنسبة لـ x

ثم نشتق بالنسبة لـ x مرة أخرى نجد: $cr=0$

المشتق الثاني لـ z بالنسبة لـ x

$$\Rightarrow \boxed{r=0}$$

معادلة تفاضلية

نشتق بالنسبة لـ y : ③ $c_q = 0$

نشتق 3 بالنسبة لـ y

نشتق مرة اخرى بالنسبة لـ y $c_t = 0$

نشتق 3 بالنسبة لـ y

معادلة تفاضلية ثانية

ممكن ③ $\Leftarrow \boxed{t=0}$

نشتق ② بالنسبة لـ y

معادلة تفاضلية ثالثة $\boxed{s=0} \Leftarrow c_s = 0$

أو نشتق 3 بالنسبة لـ x

$c_s = 0 \Rightarrow \boxed{s=0}$

ملاحظة هامة.

① اذا كان عدد الثوابت يساوي عدد المتغيرات

⇐ ينتج لدينا معادلة تفاضلية جزئية واحدة وتكون المعادلة الجبرية حلاً لها وتسمى بالحل التام

② إذا كان عدد الثوابت لا يساوي عدد المتغيرات

⇐ ينتج لدينا عدة معادلات تفاضلية جزئية وتكون المعادلة الجبرية حلاً لهذه المعادلات الناتجة

انتهت المحاضرة