المحاضرة الخامسة:

الخميس ٢٦/٣/٢٠١٥م

خواص الدوال ذات التغير المحدود.

1 - مبرهنة:

إذا كانت f دالة تغير محدود على $[a,b]$ فإنها محدودة على $[a,b]$ ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح.

2 - مبرهنة:

إذا كانت f دالة تغير محدود على $[a,b]$ فإن:

① $|f(x)|$ دالة تغير محدود على $[a,b]$ ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح.

② αf دالة تغير محدود على $[a,b]$.

③ $\frac{1}{f}$ دالة تغير محدود على $[a,b]$ حيث $f(x) \neq 0$ على $[a,b]$

$\forall x \in [a,b] : |f(x)| \geq c > 0$

3 - مبرهنة:

إذا كانت f و g دالتين كل منهما ذات تغير محدود على $[a,b]$، فإن:

① $f+g$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

② $f-g$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

③ $f.g$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

④ $\frac{f}{g}$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$، حيث $g \neq 0$ على $[a,b]$

$\forall x \in [a,b] : |g(x)| \geq c > 0$

نتيجة ①: إذا كانت f دالة تغير محدود على $[a,b]$ فإن f^n حيث $n \geq 2$ دالة تغير محدود على $[a,b]$ حيث n عدد طبيعي محدود.

نتيجة ②: إذا كانت f دالة تغير محدود على $[a,b]$ فإن f^{-n} دالة تغير محدود حيث $n \in \mathbb{N}^+$

$|f(x)| \geq c > 0 , \forall x \in [a,b]$

4 - مبرهنة:

إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ وكانت $a < c < b$ فإن f دالة تغير محدود على $[a,c]$ ، $[c,b]$ وبالعكس، وكان

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$$

نتيجة ③: إذا كانت f دالة تغير محدود على $[a,b]$ وكان $a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$

Magic Book

فإن f دالة تغير محدود على جميع المجالات الجزئية $[a,c_1],[c_1,c_2],\dots,[c_n,b]$
وتتحقق العلاقة:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c_1}{\underset{a}{V}} f + \overset{c_2}{\underset{c_1}{V}} f + \dots + \overset{b}{\underset{c_n}{V}} f$$

برهان المبرهنة الأولى:

لتكن لدينا التجزئة $P=\{a,x,b\}$ $\quad a<x<b$

$$V(f,P) = |f(x)-f(a)| + |f(a)-f(x)| < \infty$$

لأن $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty \iff f$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$.

لنبرهن الآن على: $\forall x\in[a,b],\ \exists M>0 : |f(x)| \leq M$

عندئذٍ:

$$|f(x)| = |f(x)-f(a)+f(a)| \leq |f(x)-f(a)| + |f(a)|$$
$$\leq k + |f(a)| = M$$

$$\Rightarrow \exists M>0 : |f(x)| \leq M : \forall x\in[a,b]$$

برهان المبرهنة الثانية الشق الأول.

لتكن f دالة تغير محدود على $[a,b]$ ولتكن التجزئة P معرفة كالتالي:

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n : x_0=a<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$$

ولنبرهن أن:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} |f| = \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} \big||f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\big| < \infty$$

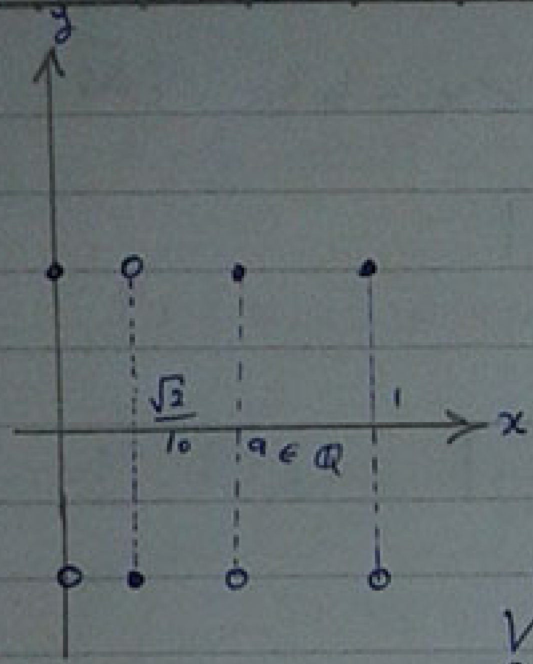
نعلم أن $\quad ||a|-|b|| \leq |a-b|$

$$\sum_{k=1}^{n} \big||f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\big| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} |f| \leq \underbrace{\overset{b}{\underset{a}{V}} f < \infty}_{\text{كون } f \text{ دالة تغير محدود}} \Rightarrow |f| \text{ دالة ذات تغير محدود}$$

مثال: لتكن لدينا الدالة f معرفة على $[0,1]$ معرفة بالشكل

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : x\in\mathbb{Q} \\ -1 & : x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$



نلاحظ أن $\forall x \in [0,1] \Rightarrow |f(x)| = 1$.

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} |f| = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} \big|\, |f(x_k)| - |f(x_{k-1})| \,\big|$$

$$P = \{x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1\}$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} |f| = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \left[|1-1| + |1-1| + \dots + |1-1| \right] = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \{0\} = 0 < \infty$$

إذاً $|f|$ دالة تغير محدود.

ولنبرهن الآن العكس ليس بالضرورة صحيح أي لنبرهن أن f دالة ليست ذات تغير محدود مع أن $|f|$ دالة تغير محدود.

لتكن التجزئة: $P = \{\underset{\in \mathbb{Q}}{x_0 = 0} < \underset{\notin \mathbb{Q}}{x_1} < \underset{\in \mathbb{Q}}{x_2} < x_3 < \dots < \underset{\in \mathbb{Q}}{x_{n-1}} < \underset{\in \mathbb{Q}}{x_n} = 1\}$

ولنبرهن أن $\overset{1}{\underset{0}{V}} f = +\infty$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \sup_{P} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sup_{P} \{ |-1-1| + |1-(-1)| + \dots + |1-(-1)| \} = \sup_{P} \{2n\}$$

نلاحظ أن $\lim_{n \to +\infty} 2n = +\infty \Rightarrow \overset{1}{\underset{0}{V}} f = +\infty$

وبالتالي f دالة ليست ذات تغير محدود.

برهان المبرهنة الثانية السؤال الثاني:

لنبرهن أنه إذا كانت f دالة ذات تغير محدود فإن αf دالة ذات تغير محدود

/ /

لكن : $P=\{x_1, x_2, \dots, x_n : a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$

$$\bigvee_a^b \alpha f = \sup_{P\in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |\alpha f(x_k) - \alpha f(x_{k-1})|$$

$$= \sup_{P\in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |\alpha (f(x_k) - f(x_{k-1}))|$$

$$= \sup \sum_{k=1}^{n} [\,|\alpha|\,|f(x_k) - f(x_{k-1})|\,]$$

$$= |\alpha| \sup_{P\in \mathbb{P}[a,b]} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = |\alpha| \bigvee_a^b f < +\infty$$

وبالتالي فإن الدالة αf دالة تغير محدود على $[a,b]$.

برهان للمرهنة الثانية الشعبة الثالثة:

لنبرهن أنه إذا كانت f دالة تغير محدود فإن $\frac{1}{f}$ دالة تغير محدود (على $[a,b]$)

بشرط $f\neq 0$

لكن التجزئة P : $P=\{x_1=a<x_2<x_3<\dots<x_n=b\}$

$$\bigvee_a^b \frac{1}{f} = \sup_{P\in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}\right| = \sup_{P\in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{f(x_k)\cdot f(x_{k-1})}\right|$$

$$= \sup_{P\in \mathbb{P}[a,b]} \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_{k-1}) - f(x_k)|}{|f(x_k)|\cdot|f(x_{k-1})|}$$

نلاحظ أن.

$$|f(x_k)| \geq c \Rightarrow \frac{1}{c} \geq \frac{1}{|f(x_k)|}$$

$$|f(x_{k-1})| \geq c \Rightarrow \frac{1}{c} \geq \frac{1}{|f(x_{k-1})|}$$

$$\bigvee_a^b \frac{1}{f} \leq \sup_P \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\Rightarrow \bigvee_a^b \frac{1}{f} \leq \frac{1}{c^2} \sup \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \Rightarrow \bigvee_a^f \frac{1}{f} \leq \frac{1}{c^2} \bigvee_a^b f < +\infty$$

وبالتالي $\frac{1}{f}$ دالة ذات تغير محدود.

/ /

برهان المبرهنة الثالثة الشق الاول :
f ، g دالتين ذات تغير محدود على $[a,b]$ ولنبرهن أن الدالة $f+g$ ذات تغير محدود .
نكون التجزئة

$$P=\{x_0=a<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g)=\sup_P\sum_{k=1}^{n}|(f+g)(x_k)-(f+g)(x_{k-1})|$$

$$=\sup_P\sum_{k=1}^{n}|[f(x_k)-f(x_{k-1})]+[g(x_k)-g(x_{k-1})]|$$

$$\leq\sup_P\left[\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|\right]$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g)\leq\sup_P\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+\sup_P\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|$$

$$\Rightarrow\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g)\leq\overset{b}{\underset{a}{V}}f+\overset{b}{\underset{a}{V}}g<+\infty$$

وبالتالي $f+g$ دالة ذات تغير محدود .

وبنفس الطريقة يكون برهان الشق الثاني من المبرهنة الثالثة

برهان المبرهنة الثالثة - الشق الثالث :
f ، g دالتين ذات تغير محدود لنبرهن أن $f.g$ دالة ذات تغير محدود (على $[a,b]$)
نكون التجزئة :

$$P=\{x_0=a<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f.g)=\sup_{P\in P[a,b]}\sum_{k=1}^{n}|(f.g)(x_k)-(f.g)(x_{k-1})|$$

$$=\sup_P\sum_{k=1}^{n}|f(x_k).g(x_k)-f(x_{k-1}).g(x_{k-1})|$$

$$=\sup\sum_{k=1}^{n}|f(x_k).g(x_k)-f(x_{k-1}).g(x_{k-1})+$$

$$+f(x_{k-1}).g(x_k)-f(x_{k-1}).g(x_{k-1})|$$

$$=\sup_P\sum_{k=1}^{n}|(g(x_k))(f(x_k)-f(x_{k-1})+$$

$$+f(x_{k-1}).(g(x_k)-g(x_{k-1})|$$

وبما أن f دالة ذات تغير محدود $\Leftarrow$ f دالة محدودة $\Leftarrow$ $|f(x_{k-1})| < \alpha$

" " " " g $\Leftarrow$ " g " $\Leftarrow$ $|g(x_k)| < \beta$

$$\Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}(f.g) \leqslant \alpha \overset{b}{\underset{a}{V}} f + \beta \overset{b}{\underset{a}{V}} g < +\infty$$

وبالتالي $f.g$ دالة ذات تغير محدود.

انتهت المحاضرة ...