تمرين: بفرض $f_1=yx^2-y+x \ , \ f_2=y^2x-x \in \mathbb{R}[x,y]$ عندئذٍ

1) أوجد قاعدة غروبنر المختصرة للمثالي $I=\langle f_1,f_2\rangle$ من أجل $y >_{gL} x$

2) بفرض $f=y^3x^3+y^2x^2-y^2+x$ أثبت أنه $f\in I$ ثم اكتب f بدلالة f_1, f_2

الحل: (1) نرتب الحدود (نلاحظ هنا أنها مرتبة):

$\boxed{1}$ $\boxed{f_2=y^2x-x}$ $\boxed{f_1=yx^2-y+x}$

نضع $G:=\{f_1,f_2\}$:

$$S(f_1,f_2)=\frac{y^2x^2}{yx^2}f_1-\frac{y^2x^2}{y^2x}f_2$$

$$=yf_1-xf_2=y(yx^2+y+x)-x(y^2x-x)$$

$$=-y^2+yx+x^2 \xrightarrow{G}\!\!\!\!\!\!\not\quad 0$$

وبالتالي نسمي المقدار الأخير f_3

$$\boxed{f_3=-y^2+yx+x^2}$$

ونضع

$$G:=\{f_1,f_2,f_3\}$$

$$S(f_1,f_3)=\frac{y^2x^2}{yx^2}f_1-\frac{y^2x^2}{-y^2}f_3=yf_1+x^2f_3$$

$$=y(yx^2-y+x)+x^2(-y^2+yx+x^2)$$

$$=-y^2+yx+yx^3+x^4$$

$$=yx^3+x^4-y^2+yx$$ الترتيب حسب $y >_{gL} x$

هذه الخطوة أفضل

$$\begin{array}{r|l} yx^2 - y + x & \cancel{yx^3} + x^4 - y^2 + yx \\ & \cancel{yx^3} - yx + x^2 \\ \hline & x^4 - y^2 + 2yx - x^2 \end{array} \quad x$$

$$\begin{array}{r|l} -y^2 + yx + x^2 & x^4 - y^2 + 2yx - x^2 \\ & \quad -y^2 + yx + x^2 \\ \hline & x^4 + yx - 2x^2 \end{array} \quad 1$$

نلاحظ أنه لا تقبل القسمة على f_1 ، f_2 ، f_3 ←

نضع

$$\boxed{f_4 = x^4 + yx - 2x^2}$$

$$S(f_2, f_3) = \frac{y^2x}{y^2x} f_2 - \frac{y^2x}{-y^2} f_3 = f_2 + x f_3$$

$$= y^2x - x + x(-y^2 + yx + x^2)$$

$$= yx^2 + x^3 - x$$

نقسم الناتج على f_1 : (لا نقسم حالياً على f_4 لأنه لم توضع في G بعد)

(*)

$$\begin{array}{r|l} yx^2 - y + x & yx^2 + x^3 - x \\ & yx^2 - y + x \\ \hline & x^3 + y - 2x \end{array} \quad 1$$

ومنه $S(f_2, f_3) \xrightarrow{G} x^3 + y - 2x \neq 0$

ومنه نضع:

$$\boxed{f_5 = x^3 + y - 2x}$$

نضع:

$$G := \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$$

* وظيفة: 7-1 .

تحقق من أن G قاعدة غروبنر . أي أن $S(f_i, f_j) \xrightarrow{G} 0$.

نلاحظ أن: $Lp(f_2)$ يقبل القسمة على $Lp(f_3)$ ومنه نحذف f_2

$Lp(f_4)$ يقبل القسمة على $Lp(f_5)$ ومنه نحذف f_4.

نقسم f على (-1) فنجد:

$$G := \{\underbrace{yx^2 - y + x}_{g_1}, \underbrace{y^2 - yx - x^2}_{g_2}, \underbrace{x^3 + y - 2x}_{g_3}\}$$

نلاحظ أن قاعدة غروبنر المختصرة لـ I . (بالامتحان تحصل أكثر بالحل)

$\boxed{2}$. إثبات $f \in I$ حسب مبرهنة: يجب أن يكون $f \xrightarrow{G} 0$

$$\begin{array}{r|l} & y^2x \\ \hline (g_1) \quad yx^2 - y + x & \cancel{y^3x^3} + \cancel{y^2x^2} - y^2 + x^2 \\ & \cancel{y^3x^3} - y^3x + \cancel{y^2x^2} \\ \hline \text{إلى} & + y^3x - y^2 + x^2 \end{array}$$

نقسم الناتج الأخير على g_2 فنجد:

(g_2)

$$y^3x - y^2 + x^2 \;\big|\; y^2 - yx - x^2$$

$$\cancel{y^3x} - y^2x^2 - yx^3$$

$$\cancel{y^2x^2} + yx^3 - y^2 + x^4$$

$$\cancel{y^2x^2} - yx^3 - x^4$$

$$2yx^3 + x^4 \cancel{- y^2} \cancel{+ x^2}$$

$$\cancel{-y^2} \cancel{+ x^2} + yx$$

الباقي : $2yx^3 + x^4 - yx$ نقسمه على g_3 (أو على g_1 لنفس السبب)

$$2y + x$$

(g_3)

$$2yx^3 + x^4 - yx \;\big|\; x^3 + y - 2x$$

$$2yx^3 + 2y^2 - 4yx$$

$$x^4 - 2y^2 + 3yx$$

$$x^4 + yx - 2x^2$$

$$-2y^2 + 2yx + 2x^2 = -2g_2 \quad (g_2)$$

معدوم

$f \in I$ حسب مبرهنة.

لإيجاد f بدلالة f_1 و f_2 نأخذ التعريف الآتي ثم نعود لطريقة الترتيب.

تعريف:

نفرض $I=\langle f_1,\dots,f_s\rangle$ مثالي من $K[x_1,\dots x_n]$ ونفرض $G=\{g_1,\dots g_t\}$ قاعدة غروبنر المختصرة للمثالي I عندئذٍ: يوجد مصفوفة كثيرات حدود M بُعدها $t\times s$ بحيث يكون

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_t \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_s \end{bmatrix}$$

حيث نسمي هذه المصفوفة بمصفوفة التحويل من G إلى I.

العودة للتمرين السابق:

$$g_1 = f_1$$
$$g_2 = -f_3 = -y f_1 + x f_2$$
$$g_3 = f_2 + x f_3 - \underbrace{f_1}$$

حسب (*)

$$= f_2 + x(y f_1 \;\; x f_2) - f$$
$$= (yx-1) f_1 + (-x^2+1) f_2$$

ومنه: مصفوفة التحويل:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -y & x \\ yx-1 & -x^2+1 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

M مصفوفة التحويل.

من $\boxed{2}$ نلاحظ:

متمماع (g_1) ثم (g_2) ثم (g_3) ثم (g_j) فيكون:

$$f = -2g_2 + (2y+x)g_3 + (yx + x^2 - 1)g_2 + y^2x\, g_1$$

$$= (yx + x^2 - 3)(-y f_1 + x f_2) + (2y+x)\left[(yx-1) f_1 + (-x^2+1) f_2\right] + y^2 x f_1$$

$$= \left[-y^2x \cancel{-yx^2} \boxed{+3y} + 2y^2x \boxed{-2y} \cancel{+yx^2} - x + y^2x\right] f_1$$

$$+ \left[yx^2 \cancel{+x^3} - 3x - 2yx^2 + 2x \cancel{-x^3} + x\right] f_2$$

ومنه

$$f = (2y^2x + y - x) f_1 + (-yx^2 + 2y - 2x) f_2$$

تحقيق:

$$(2y^2x + y - x)(yx^2 - y + x) + (-yx^2 + 2y - 2x)(y^2x - x)$$

$$= 2y^3x^3 \cancel{-2y^3x} \cancel{+2y^2x^2} + y^2x^2 - y^2 \cancel{+yx} \cancel{-yx^3} \cancel{+yx} - x^2$$

$$- y^3x^3 \cancel{+yx^3} \cancel{+2y^3x} \cancel{-2yx} \cancel{-2y^2x^2} + 2x^2$$

$$= y^3x^3 + y^2x^2 - y^2 + x = f$$

معنه صحيح ☺

هئنة ←

وظيفة: 7.2   جبري (دورة 2012 - 2013)

لنفرض:

$$f_1 = x^2 - y + 1 \,,\quad f_2 = xy + x - 1 \in \mathbb{R}[x,y]$$

10 علامات

1. احسب $S(f_1, f_2)$ من أجل $\underset{lex}{y > x}$

20 علامة

2. أوجد قاعدة غروبنر المختصرة للمثالي $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ من أجل $\underset{lex}{y > x}$.

10 علامات

3. أوجد مصفوفة التحويل من f_i إلى I .

10

4. أثبت أن $f \in I$ حيث

$$f = x^3 + yx^2 - y^2 + 2x + y - 1$$

واكتب f بدلالة f_1, f_2 ..

انتهت المحاضرة السابعة