المحاضرة السادسة "عملي"
الخميس 2015/4/16

سؤال دورة 2014_2015 : انظر صفحة ١٤١_ ١٤٢
عرف التقارب بالنسبة إلى قياس مطلق و أثبت أنّ مجموع وجزء متتاليتين متقاربتين بالقياس هما متتاليتان متقاربتان بالقياس.

- تعريف:
في فضاء مقيس $(X, \mathcal{B}, \mu)$ نقول عن متتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ من الدوال القيسية إنها تتقارب بالقياس μ من دالة قيسية f إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \{\mu(x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

ونكتب: $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

- لتكن $(f_n)_{n\geq 1}$ و $(g_n)_{n\geq 1}$ متتاليتين من الدوال القيسية ولتكن f و g دالتين قيسيتين عندئذٍ

إذا كانت $f_n \xrightarrow{\mu} f$ و $g_n \xrightarrow{\mu} g$ فإنّ: $f_n + g_n = h_n \xrightarrow{\mu} h = f + g$

الإثبات:
هنا إثبات أنّ: $h_n \xrightarrow{\mu} h$

ليكن ε أي عدد موجب و نريد إثبات أنّ:

$$\lim_{n\to\infty} (\mu\{x \in X : |h_n(x) - h(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}) \to 0 \quad ; f_n \xrightarrow{\mu} f$$
A_{n_1}

$$\mu(\{x \in X : |g_n(x) - g(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}) \to 0 \quad ; g_n \xrightarrow{\mu} g$$
A_{n_2}

هل المجموعة $A_{n_1} \cup A_{n_2} \supseteq A_n$

لو كان الأمر كذلك فإنّ :

$$0 \leq \mu(A_n) \leq \mu(A_{n_1}) + \mu(A_{n_2})$$

فإذا جعلنا $n \to \infty$ لوجدنا أنّ :

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq 0 + 0$$

وبالتالي :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$$

لبرهنة أنّ : $A_n \subseteq A_{n_1} \cup A_{n_2}$

$$x \notin A_{n_1} \cup A_{n_2} \Rightarrow x \notin A_n$$

$$x \notin A_{n_1} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$x \notin A_{n_2} \Rightarrow |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|h_n(x) - h(x)| = |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))|$$

$$|h_n(x) - h(x)| = |(f_n(x) - f(x)) + (g_n(x) - g(x))|$$

$$|h_n(x) - h(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا يقتضي أن يكون $x \notin A_n$.

• إذا كانت $f_n \xrightarrow{\mu} f$ و $g_n \xrightarrow{\mu} g$ فإنّ : $f_n - g_n = h_n \xrightarrow{\mu} h = f - g$

تمرين هام :

$f : (X, \mathcal{S}) \longrightarrow \Omega$ تطبيقاً محض وكان :

$$\mathcal{A} = \{E \subset \Omega : f^{-1}(E) \in \mathcal{S}\} \subset P(\Omega)$$

فإنّ $\mathcal{A}$ جبر تام من أجزاء Ω .

الحل :

$\mathcal{S} \ni X = f^{-1}(\Omega) \Rightarrow \Omega \in \mathcal{A}$

$\mathcal{S} \ni \phi = f^{-1}(\phi) \Rightarrow \phi \in \mathcal{A}$

إذا كانت $B \in \mathcal{A} \overset{?}{\Rightarrow} B^c \in \mathcal{A}$

$B \in \mathcal{A} \Rightarrow B \subset \Omega \ , \ f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$

$B^c \in \mathcal{A} \Rightarrow f^{-1}(B^c) \in \mathcal{S} \ , \ f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c \in \mathcal{S}$

$\forall n \geq 1 : B_n \in \mathcal{A} : \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$

لدينا $f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$

$\Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in \mathcal{S}$

سؤال :

هل صف المجالات المغلقة يولد بوريل ؟

$]0,1_0[= \bigcup A_n$

$= \bigcup \left[0 + \frac{1}{n} \ , \ 1_0 - \frac{1}{n}\right] =]0,1_0[$

لنأخذ أي مجال $]a,b[$:

$]a,b[= \bigcup \left[a + \frac{1}{n} \ , \ b - \frac{1}{n}\right]$

$\Rightarrow \overline{J}_0 \subset \sigma(J_1) \subset B_{\mathbb{R}} \Rightarrow \hat{J}_0 \subset \hat{J}_1 \subset B_{\mathbb{R}}$

ولدينا حسب مبرهنة سابقة $\hat{J}_0 = B_{\mathbb{R}}$ (صف المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ يولد بوريل)

وبالتالي :

$B_{\mathbb{R}} \subset \hat{J}_1 \subset B_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \hat{J}_1 = B_{\mathbb{R}}$

انتهت المحاضرة