المحاضرة السادسة 30/3/2015

مثال عن البرنامج المرافق : نعتبر لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \longrightarrow Max$$

ضمن الشروط :

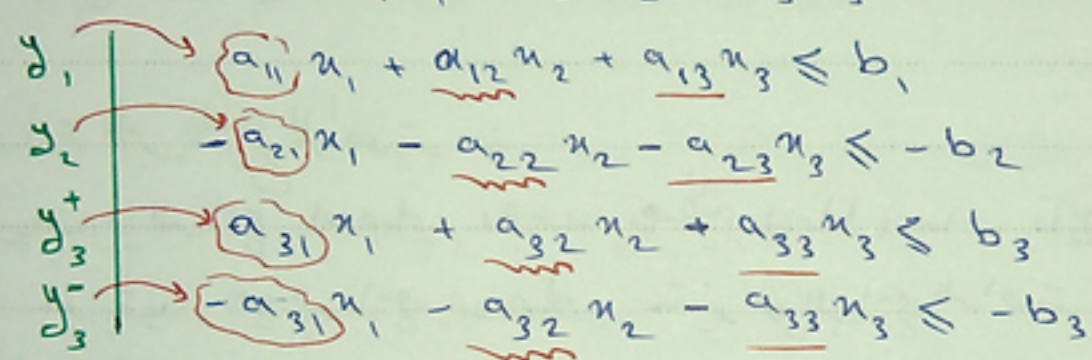
$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &\geqslant b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\}$$

و $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$

اولا" لايجاد البرنامج المرافق للبرنامج السابق نقوم باجراء التعديل على القيود لجعلها جميعها من الشكل $\leqslant$ (اقل او يساوي) لان تابع الهدف Max : كالتالي :

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \longrightarrow Max$$

ضمن الشروط :



و $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$

اذا اجبنا البرنامج الاخير جاهز لايجاد البرنامج المرافق كالتالي :

$$L = b_1y_1 - b_2y_2 + b_3y_3^+ - b_3y_3^- \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط :

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 - a_{21}y_2 + a_{31}y_3^+ - a_{31}y_3^- &\geqslant c_1 \\ a_{12}y_1 - a_{22}y_2 + a_{32}y_3^+ - a_{32}y_3^- &\geqslant c_2 \\ a_{13}y_1 - a_{23}y_2 + a_{33}y_3^+ - a_{33}y_3^- &\geqslant c_3 \end{aligned}\right\} \quad *$$

$$y_1, y_2, y_3^+, y_3^- \geqslant 0 \quad *$$

مثال ثاني : اوجد البرنامج المرافق للبرنامج التالي :

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \longrightarrow Max$$

ضمن الشروط

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

مثال ثالث: اوجد الرباعي المرافقة للرباعي:

$$L = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \longrightarrow Min$$

حيث الشروط:
$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 4 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\geq 2 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

نظريات مختلفة حول المرافقة:

1. ان النموذج المرافقة للنموذج المرافقة هو النموذج الاصلي.
2. اذا كان $(x_1, \dots, x_n)$ حلاً مقبولاً للنموذج الاصلي وكان $(y_1, \dots, y_m)$ حلاً مقبولاً للنموذج المرافقة فان قيمة تابع الهدف للنموذج الاصلي لاتتجاوز قيمته تابع الهدف للنموذج المرافقة عند هاذين الحلين: $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
وذلك من اجل جميع الحلول المقبولة بما فيها الحل الامثل (تحقق المساواة).
3. اذا كان تابع الهدف في احد النموذجين (النموذج الاصلي ومرافقه) غير محدود (ليس له حل امثل) فان النموذج الآخر يكون غير قابل للحل
4. اذا كان لاحد النموذجين المترافقين حل مثالي محدد فان للنموذج الآخر حل مثالي محدد وقيمة تابعي الهدف متساويين $MaX\ Z = Min\ L$
5. نظرية الرافعة: الشرط اللازم والكافي ليكون الحلين المقبولين $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ حلين مثاليين للنموذج الاصلي ومرافقه هي ان تكون قيمتا تابعي الهدف لهما متساويين وان تحقق الشرطية التاليين:

$$x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j\right) = 0 \quad ; \quad j = \overline{1,n} \quad \dots\ 1$$

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right) = 0 \quad ; \quad i = \overline{1,m} \quad \dots\ 2$$

هذا يعني انه يلزم ويكفي ان يكون احد العبارتين متساوياً للصفر في كل من العلاقتين 1 و 2

وبعبارة اخرى: اذا كانت قيمة احد مركبات الحل المثالي $x_j' \neq 0$ في النموذج الاصلي فان الحل المثالي للنموذج المرافقة يحيل للمتراجحة المقابلة لذلك المتحول مساواة تامة.

- اذا كان $x_j' \neq 0$ فان:

$$a_{1j} y_1' + a_{2j} y_2' + \dots + a_{mj} y_m' = c_j$$

وبالمقابل اذا كان $y_i' \neq 0$ فان المتراجحة المقابلة لذلك المتحول تكون مساوية للصفر.

المفهوم الاقتصادي للنموذج (البرنامج) المرافق :

نوضح المفهوم الاقتصادي من خلال المثال التالي :

تنتج احدى الشركات نوعين من المنتجات A_1, A_2 وتستخدم لذلك نوعين من المواد الأولية وإن المقادير اللازمة من هاتين المادتين لانتاج واحدة لكل من المنتجات A_1, A_2 و الكمية الاحتياطية المتوفرة من هذه المواد وسعر البيع لكل واحدة من A_1, A_2 مبينة بالجدول التالي :

المواد الأولية \ المنتجات	ما يلزم لانتاج الوحدة الواحدة A_1	A_2	الكمية المتوفرة
B_1	5	10	160
B_2	1	1	24
C_j السعر	90	100	

المطلوب [1] أوجد الخطة الانتاجية المثالية التي تجعل قيمة منتجات هذه الشركة (سعر البيع) أكبر ما يمكن .

[2] اوجد النموذج المرافق .

[3] اذا كان الحل المثالي للنموذج الاصلي هو $x'_1 = 16$, $x'_2 = 8$ يقابله $Z = 2240$ أوجد الحل المثالي للنموذج المرافق .

[4] ما المفهوم الاقتصادي البرنامج الاصلي والبرنامج المرافق .

[5] ما العلاقة بين الحلين .

الحل :

نفرض : x_1 الكمية المنتجة من المنتج A_1 .

x_2 الكمية المنتجة من المنتج A_2 .

عندئذ يكون تابع الهدف : $Z = 90x_1 + 100x_2 \longrightarrow Max$

قيود المسألة :

$y_1 \mid 5x_1 + 10x_2 \leq 160$

$y_2 \mid x_1 + x_2 \leq 24$

$x_1, x_2 \geq 0$

[2] ومنه يكون النموذج المرافق بالشكل : $L = 160y_1 + 24y_2 \longrightarrow Min$

قيود المسألة :

$5y_1 + y_2 \geq 90$

$10y_1 + y_2 \geq 100$

$y_1, y_2 \geq 0$

[3] لدينا : $x'_j (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m - c_j) = 0$

من أجل $j = 1, 2$ و $i = 1, 2$.

من أجل $\boxed{j = 1}$:

$x'_1 (a_{11}y'_1 + a_{21}y'_2 - c_1) = 0$

من أجل $\boxed{j = 2}$:

$x'_2 (a_{12}y'_1 + a_{22}y'_2 - c_2) = 0$

ALMOUID.net

$5y'_1 + y'_2 = 90$.
$10y'_1 + y'_2 = 100$
$-\quad 5y'_1 = 10 \Rightarrow y'_1 = 2$
$y'_2 = 80$

$\Rightarrow \quad 16(5y'_1 + y'_2 - 90) = 0$
$\quad\quad 8(10y'_1 + y'_2 - 100) = 0$

كل جملة المعادلتين السابقتين تحوي $y'_1 = 2, y'_2 = 80$

للتحقق نفرض في L : $L = 160(2) + 24(80) = 2240 = Z$

* ان متحولات التابع الاصلي هي كميتي الانتاج x_1, x_2 او A_1, A_2 ان هذه الكمية مضروبة بالاسعار تعطينا قيمة المنتجات (اي ثمن هذه المنتجات)
* ان المتحولات ما تابع الهدف للنموذج المرافقة هي عبارة عن الاسعار y_1, y_2 لواحدة المواد الاولية B_1, B_2 مضروبة بالكميات المتوفرة تعطينا قيمة المواد المتوفرة .
ولهذا سميت هذه المتحولات بالاسعار الحدية ((اسعار الظل)) .
* إن المتراجحة الاولى في النموذج المرافقة تعني أن قيمة ما يلزم من المواد الأولية لصناعة واحدة من المنتج A_1 لا تقل عن سعر الوحدة الواحدة من هذا المنتج .
مثلاً : $5y_1 + y_2$ تعبر عن قيمة تكلفة وحدة واحدة من المنتج A_1 ولدينا سعر الوحدة الواحدة من المنتج A_1 هي 90 ولكن لنتابع الى اكثر من وحدة واحدة من المنتج A_1 اي يجب ان تكون التكلفة اكبر او تساوي تكلفة الوحدة الواحدة بأسوء الحالات .
* وان المتراجحة الثانية في النموذج المرافقة تعني أن قيمة ما يلزم من المواد الأولية لصناعة واحدة من المنتج A_2 لا تقل عن سعر الوحدة الواحدة من المنتج .

ان النموذج الاصلي يعطينا افضل خطة للانتاج التي تجعل قيمة ذلك الانتاج اكبر ما يمكن والحل المثالي للنموذج المرافقة يعطينا افضل تشكيلة اسعار للمواد الأولية .
حيث ان Max Z . Min L

حيث ان الحل الامثل للبرنامج المرافقة يمثل الحد الادنى لسعر المواد الاولية بحيث اننا اذا تجاوزنا هذا السعر سواء لـ A_1 او A_2 نقع في خسارة .
واذا اشترينا هذه المواد الاولية بنفس الاسعار نكون في وضع لا ربح ولا خسارة .
الـ y_1, y_2 تكلفة اذا اشترينا بأقل اسعار اقل من التي حصلنا عليها من المرافقة نكون قللنا التكلفة وزودنا الربح

نموذج الاسناد (التعيين) : تهتم هذه النماذج بالاسناد الافضل لمختلف الموارد الاقتصادية والانتاجية على مختلف الاعمال المراد انجازها تمتاز هذه المسائل ببساطة معالجتها للمشاكل على عكس مسائل النقل . في معظم هذه المسائل تتساوى الاعمال المراد انجازها مع الموارد
وبالنسبة لتابع الهدف يمكن أن يكون Max, Min

نص المسألة: لنفرض امتلاكنا توزيع n عاملاً (أو آلة) على n عملاً بحيث يقوم كل عامل بإنجاز عمل واحد فقط وبحيث يكون إجمالي الإنتاج لها أكبر ما يمكن. وذلك ضمن الإنتاجية (التكلفة) المحددة لكل منهم.

نرمز بـ c_{ij} لإنتاج العامل i من العمل j حيث تمثل هذه الإنتاجية بالمصفوفة التالية:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث أن هذه المصفوفة يمكن أن تكون مصفوفة تكاليف بدلاً من الإنتاج.

صياغة النموذج الرياضي: نرمز بـ x_{ij} للمتحول الذي يأخذ قيمة تساوي الواحد عندما نعين العامل i إلى العمل j ويأخذ قيمة تساوي الصفر عندما يكون العكس ونكتب مصفوفة المتحولات بالشكل:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

بما أن العامل الواحد لا يمكن أن يأخذ إلا عملاً واحداً فهذا يعني أن واحد فقط من المتحولات x_{ij} في السطر i سيأخذ قيمة تساوي الواحد أما بقية المتحولات في ذلك السطر ستأخذ قيمة تساوي الصفر.

وبما أن العمل الواحد لا يمكن أن ينفذ الا من قبل عامل واحد فهذا يعني أن واحد فقط من المتحولات x_{ij} في العمود j سيأخذ قيمة تساوي الواحد أما بقية المتحولات في ذلك العمود ستأخذ قيمة تساوي الصفر.

عندئذ تكتب دالة الهدف على الشكل التالي:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow Max$$

ضمن الشروط:

شروط العمل.

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn} = 1 \end{array}\right\}$$

شروط الآلات

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{n1} = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{nn} = 1 \end{array}\right\}$$

مثال:

لنفرض انه لدينا ثلاثة اعمال A_1, A_2, A_3 ولدينا ثلاثة آليات B_1, B_2, B_3 كل عمل يمكن أن ينجز وبشكل كامل باستخدام اي آلة من الآلات الثلاث.
وبالمقابل كل آلة يمكن أن تنجز اي من الاعمال الثلاثة .

المطلوب:

تخصيص هذه الآليات للاعمال الموجودة بحيث نحصل على الاسناد الامثل اي الاسناد الذي يعطينا التكلفة الكلية الدنيا ،
علماً ان تكاليف هذه الاعمال وهي متعلقة باداء كل عمل مبينة بالجدول المرفق وكل آلة مخصصة لاداء عمل واحد وكل عمل ينجز بواسطة آلة واحدة فقط وعليه فان عدد الآليات يساوي عدد الاعمال ،

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي بحيث تكون التكلفة اقل ما يمكن .

« يمكن وضع الجدول بشكل اختياري » ، جدول التكلفة ،

Finished Lecture....