الاثنين : # المحاضرة السابعة 6/4/2015

أنواع مسائل البرمجة الخطية :

تصنف مسائل البرمجة الخطية تبعاً لـ :

1 - تابع الهدف وهي نوعين :

مسائل تعظيم : في هذه المسائل تكون دالة الهدف من نوع تعظيم العائد (الأرباح) ((تعظيم الانتاج)) وبالتالي تكتب دالة الهدف بالشكل :

$$Max\ Z = \sum_{j=1} c_j x_j$$

مسائل تقليل : في هذه المسائل تكون دالة الهدف من نوع تقليل التكاليف أو تقليل الخسائر وبالتالي تكتب دالة الهدف بالشكل :

$$Min\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

2 - تبعاً للقيود (المقيدات) : وهي ثلاثة أنواع :

الشكل القانوني : يتصف هذا الشكل بالصفات التالية :

كافة المقيدات (عدا قيود عدم السلبية) من النوع اصغر أو يساوي وتابع تابع Max

والشكل الرياضي القانوني لمسألة البرمجة الخطية :

أوجد $Max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ضمن الشروط :

- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad ; \quad i = \overline{1,m}$
- $x_j \geqslant 0 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$

مثال : أوجد $Max\ Z = 4x_1 + 3x_2$ ضمن الشروط :

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 6$$
$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 3$$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 4$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

الشكل الاعتيادي : في هذا الشكل تكون مسألة البرمجة الخطية تحوي خليطاً من القيود $(\geqslant, =, \leqslant)$ أو من نوع واحد ، ما عدا شروط عدم السلبية من النوع أكبر أو يساوي دوماً .

والشكل الرياضي الاعتيادي لمسألة البرمجة الخطية :

أوجد $Max\ Z$ أو $Min\ Z$ حيث $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ضمن الشروط :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{pmatrix} \geqslant \\ = \\ \leqslant \end{pmatrix} b_i \quad ; \quad i = \overline{1,m}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

مثال [1] : أوجد $\max Z = 30x_1 + 25x_2$ ضمن الشروط :

$$4x_1 + 2x_2 \leq 60$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 50$$
$$3x_1 + 9x_2 = 65$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

مثال [2] : أوجد $\min Z = 20x_1 + 25x_2$ ضمن الشروط :

$$2x_1 + 3x_2 \geq 18$$
$$x_1 + 3x_2 = 12$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 24$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

مثال [3] : أوجد : $\min Z = 15x_1 + 4x_2$ ضمن الشروط :

$$x_1 + 3x_2 \geq 0$$
$$2x_1 + 5x_2 \geq 12$$
$$5x_1 + x_2 \geq 10$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

الشكل القياسي : وفيه تكون جميع القيود من نوع مساواة ونكتب مسألة البرمجة الخطية بالشكل التالي :

أوجد $\min Z$ أو $\max Z$ حيث $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

ضمن الشروط : $\sum a_{ij} x_j = b_i$ حيث $i = \overline{1,m}$

$x_j \geq 0 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$

مثال : أوجد $\max Z = 3x_1 + 2x_2$ ضمن الشروط :

$$2x_1 + 4x_2 = 5$$
$$x_1 - 2x_2 = 7$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

طرق حل البرامج الخطية :

لحل البرامج الخطية نتبع احدى الطرق التالية :

[1] الطريقة البيانية .

[2] الطريقة الجبرية تسمى Simplex

الحل البياني لجملة المعادلات الخطية :

نلجأ في هذه الطريقة الى تمثيل مجموعة النقاط التي تحقق جملة المعادلات (المتراجحات) في أحد الفضاءات التالية IR, R^2, R^3 وذلك حسب عدد المتغيرات في هذه الجملة .

وعليه لحل جملة المعادلات الخطية بيانياً يجب ان تكون الجملة واحدة من هذه الحالات :

الحالة الاولى : اذا كان عدد المجاهيل $n=1$ أو $n=2$ أو $n=3$.

الحالة الثانية : اذا حقق عدد المجاهيل وعدد المعادلات احد الشروط التالية :

$n-m=3$ أو $n-m=2$ أو $n-m=1$

حيث نستطيع تحويل النموذج الى نموذج تابع لمتحول واحد أو متحولين أو ثلاث متحولات على الترتيب ونرسم منطقة الحلول في احد الفضاءات IR أو R^2 أو IR^3 على الترتيب .

- أي عندما تكون $n-m=1$ هذا يعني اننا نستطيع تحويل النموذج الى نموذج بمتحول واحد
وعندما تكون $n-m=2$ هذا يعني اننا نستطيع تحويل النموذج الى نموذج بمتحولين .
و $n-m=3$ " " " " " " بثلاث متحولات .

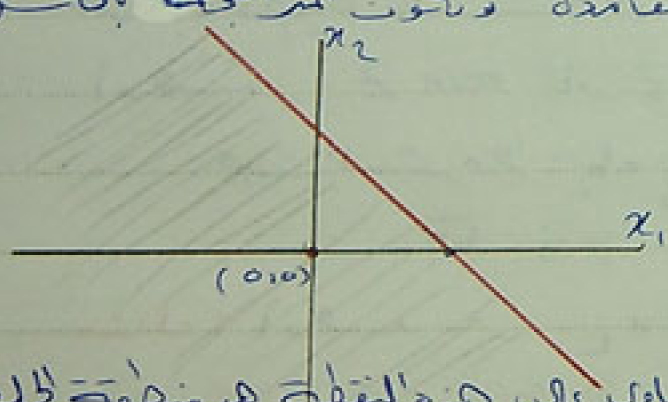
ملاحظة : بالنسبة لعدد المتحولات :

- عندما يكون لدينا متحول واحد نقوم برسم محور الاعداد الحقيقية عندئذ تكون المتراجحة من الشكل

$an+b \leq c \Leftarrow x \leq \frac{c-b}{a} = d$ نقوم بتحديد d على المحور

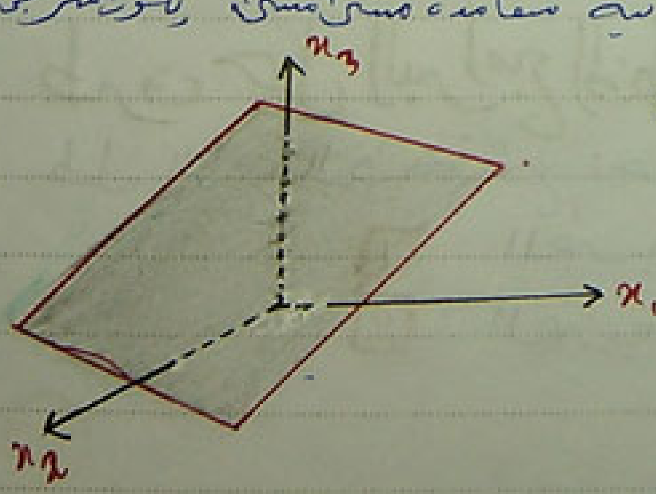
d تقسم المحور الى قسمين احد هذين القسمين يعين منطقة الحلول .

- اما من اجل متحولين نقوم برسم جملة محاور إحداثية متعامدة وتكون المتراجحة بالشكل :



$an_1 + bn_2 \leq d$ نقوم بكتابتها بالشكل
$an_1 + bn_2 = d$ هذه معادلة مستقيم نقوم
برسمه على جملة الاحداثيات فيقسم المستوي
الى قسمين ثم نقوم بأخذ نقطة من احد القسمين
نعوضها في المتراجحة ، اذا كانت محققة فيكون القسم الحاوي على هذه النقطة هو منطقة الحلول
وقد اتفقنا على ان نجرب النقطة (0,0) !!

- من اجل ثلاث متحولات نقوم برسم ثلاثة محاور احداثية متعامدة مثنى مثنى وتكون المتراجحة



بالشكل $an_1 + bn_2 + cx_3 \leq d \Rightarrow$ بالمساواة تصبح
معادلة مستوي يقسم الفضاء الى قسمين احدهما
منطقة حلول المتراجحة نقوم بتجريب (0,0,0)
لتحديد منطقة الحلول .

مثال: اوجد قيم x_1, x_2 التي تحقق $\max Z = 30x_1 + 40x_2$

ضمن الشروط:

$$4x_1 + 8x_2 \leq 30$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 20$$
$$0x_1 + 5x_2 \leq 25$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

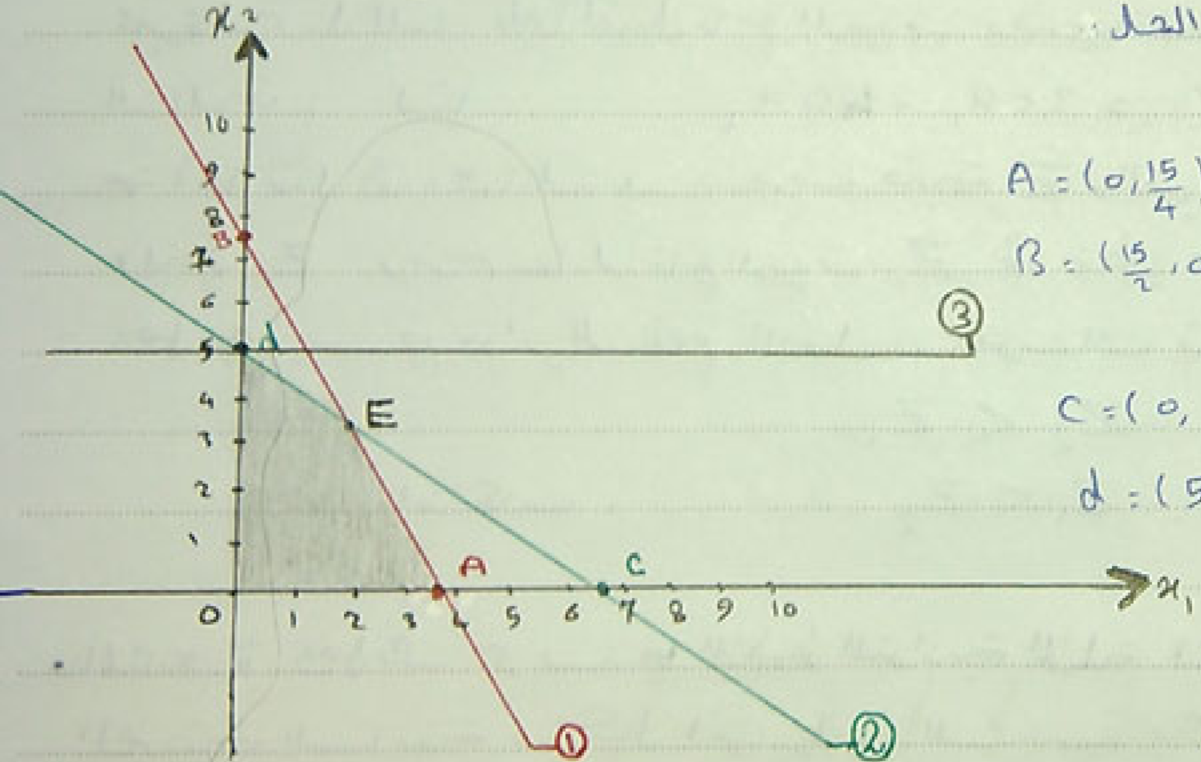
الحل: نعتمد المحور الافقي x_1 والمحور العمودي x_2 ثم نمثل القيود وذلك عن طريق رسم المستقيمات:

① $4x_1 + 8x_2 = 30$

② $4x_1 + 3x_2 = 20$

③ $0x_1 + 5x_2 = 25$

مع الاخذ بعين الاعتبار $x_1, x_2 \geq 0$ من اجل تمثيل كل من هذه المستقيمات نحدد نقطتين من كل منها ثم نصل بين النقطتين ونحدد المنطقة التي تحقق المتراجحة الموافقة وذلك باختيار نقطة (0,0) ثم نعوض احداثيات هذه النقطة في المتراجحة فإذا كانت محققة تكون المنطقة التي تقع فيها هذه النقطة هي منطقة الحل. اما اذا كانت غير محققة فإن المنطقة المعاكسة هي منطقة الحل:



رسم المستقيم الأول:

x_1	0	$\frac{15}{2}$
x_2	$\frac{15}{4}$	0

$A = (0, \frac{15}{4})$

$B = (\frac{15}{2}, 0)$

رسم المستقيم الثاني:

x_1	0	5
x_2	$\frac{20}{3}$	0

$C = (0, \frac{20}{3})$

$d = (5, 0)$

رسم المستقيم الثالث:

x_1	0	0
x_2	5	0

موازي للمحور ox_1

بعد تحديد مناطق الحل للمتراجحة الأولى والثانية والثالثة نقوم بمطابقة مناطق الحلول فنجد منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المحددة بالمضلع OAEd المظلل.

وهنا يجب البحث عن الحل الامثل الذي يجعل التابع Z اكبر ما يمكن

بالنظر الى منطقة الحلول نجد ان الاقرب الى الحل الامثل هو احد النقاط الممثلة لرؤوس المضلع ومن اجل تحديد الحل الامثل نعوض احداثيات هذه النقاط بتابع الهدف حيث نجد احداثيات النقط المجهولة من خلال دراسة تقاطع المستقيمين الناتجة عن تقاطعهما.

((اقره لا تعتبر حل))

/ /

* للحصول على احداثيات النقطة E يتم ذلك بحل جملة المعادلتين الآتيتين:

$$4x_1 + 8x_2 = 30 \quad ①$$

$4x_1 + 3.2 = 20 \Rightarrow \frac{14}{4}$

$$4x_1 + 3x_2 = 20 \quad ②$$

بطرح ② من ① نجد: $5x_2 = 10 \Leftarrow x_2 = 2$

نعوض x_2 بإحدى المعادلتين فنحصل على $x_1 = \frac{14}{4} = 3.5$

ومنه احداثيات النقطة $E = (3.5, 2)$

ثم نحسب قيمة التابع عند النقاط: $A = (0, \frac{15}{4})$, $d = (5, 0)$, $E = (3.5, 2)$

عندئذ نجد: $Z_A = 30$, $Z_d = 150$, $Z_E = 121$

وبالتالي الحل الامثل هو $x_1 = 5$, $x_2 = 0$.

⊙ نلاحظ ان هذا الحل صحيح عندما يكون عدد النقاط قليل حيث نتمكن من تعويضها بتابع الهدف والنقطة التي تعطي افضل قيمة لتابع الهدف هي التي تمثل الحل الامثل اما عندما يوجد شروط متعددة واعداد لا بأس بها من النقاط الرأسية الواقعة على محيط منطقة الحلول المقبولة. في هذه الحالة تصبح طريقة ايجاد احداثيات كل هذه النقاط وتعويضها بتابع الهدف غير عملية لذلك نلجأ لتمثيل تابع الهدف وتحديد نقطة الحل الامثل وفق الطريقة التالية: لدينا $Z = 30x_1 + 40x_2$

من أجل تمثيل هذه المعادلة يجب معرفة قيمة Z والتي هي مجهولة لدينا لذلك نفترض قيمة ما ولتكن Z_1 ونرسم معادلة تابع الهدف Z_1 ثم نعطي قيمة اخرى ولتكن Z_2 ونمثل المعادلة نحصل على مستقيم موازٍ للمستقيم الاول. اقترب الى نقطة الاصل بذلك

$$Z_2 < Z_1$$

وابتعد اذا كان: $Z_1 < Z_2$

وبالمتابعة نحصل على مجموعة من الخطوط المتوازية الممثلة لتابع الهدف ولكن يمكن أن نستخدم الطريقة السابقة بشكل اسهل وذلك بعد رسم المستقيم الذي يمثل تابع الهدف Z_1 نقوم بسحب هذا المستقيم برسم خطوط موازية له باستخدام المسطرة ومثلث الرسم والغاية من ذلك الاقتراب (ملامسة نقطة الحل الامثل) والتي تقع على حدود منطقة الحلول الممكنة حيث يتم السحب بالاتجاه المعاكس لنقطة الاصل اذا كان التابع تابع تعظيم. لاننا نريد الحصول على اكبر قيمة ويكون السحب بالاتجاه الموافق لنقطة الاصل اذا كان التابع تابع تقليل لاننا نريد الحصول على اصغر قيمة.

مثال: اوجد قيمة كل من المتحولات $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ التي تجعل التابع

$$Z = -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 - x_6 + 2x_7 - 15 \longrightarrow \max$$

الخاضع للشروط المستقلة خطياً:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -3$$

$$x_1 + x_2 - x_5 = -4$$

$$x_2 + x_6 = 5$$

$$2x_1 - 2x_2 - x_6 + 2x_7 = 7 \quad , \quad x_j \geq 0 \; : \; j = \overline{1,7}$$

نموذج قياسي

الحل: نلاحظ أن $n = 7$ و $m = 5$ ومنه $n - m = 2$ لذلك لنحله بيانياً كما يلي

أي لنحوله الى نموذج بمتحولين فقط كما يلي:

$$x_3 = 4 - x_1 + x_2$$

$$x_4 = 3x_1 - 2x_2 - 1$$

$$x_5 = x_1 + x_2 + 4 \quad , \quad x_6 = 5 - x_2 \quad ,$$

$$x_7 = -x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 6$$

بما أن $x_j \geq 0$ حيث $j = \overline{1,7}$ فنحصل على القيود التالية: $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

نعوض قيم المتحولات $x_3, \ldots, x_7$ في تابع الهدف فنحصل على تابع هدف بمتحولين x_1, x_2

وعليه يصبح النموذج الجديد هو: أوجد:

«بالتعويض مباشرة» $\max Z' = 5x_1 + 2x_2 + 10$

ضمن الشروط:

$$4 - x_1 + x_2 \geq 0 \quad \& \quad 3x_1 - 2x_2 - 1 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + 4 \geq 0 \quad \& \quad 5 - x_2 \geq 0 \quad \& \quad -x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 6 \geq 0$$

حيث: $x_1, x_2 \geq 0$

اذاً حصلنا على نموذج رياضي بمتحولين نقوم بحله بيانياً ..

Finished Lecture....

Eman ALhaLboni ...