المحاضرة السادسة — الاثنين 2015/3/3

خواص الدوال ذات التغير المحدود

مبرهنة:

إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ وكانت $a<c<b$ فإن f دالة ذات تغير محدود على كل من $[a,c]$ ، $[c,b]$ وبالعكس

وتحقق: $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$

البرهان:

لنأخذ التجزئة: $P_1 = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = c\}$ للمجال $[a,c]$

$P_2 = \{c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = b\}$

عندئذ $P = P_1 \cup P_2$ حيث P تجزئة للمجال $[a,b]$ فإن:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f,P) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f,P_1) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f,P_2) \quad ; \quad \overset{b}{\underset{a}{V}}(f,P) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}f \geqslant \overset{c}{\underset{a}{V}}(f,P_1) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f,P_2) \Leftrightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \geqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f,P_1) \; ; \; \overset{b}{\underset{a}{V}}f \geqslant \overset{b}{\underset{c}{V}}(f,P_2)$$

وبما أن $[a,c] \subset [a,b]$ و $[c,b] \subset [a,b]$

فإن:

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f,P_1) \leqslant \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < +\infty \Rightarrow$$ f دالة ذات تغير محدود على $[a,c]$

$$\overset{b}{\underset{c}{V}}(f,P_2) \leqslant \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < +\infty \Rightarrow$$ f دالة ذات تغير محدود على $[c,b]$

ونلاحظ أن

$$\text{①} \;\dots\; \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \geqslant \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$$

العكس:

f دالة ذات تغير محدود على المجالين $[c,b]$ ، $[a,c]$

لنأخذ تجزئة للمجال $[a,b]$ بحيث لا تحوي c ولتكن P

وننشئ التجزئة P' التي تحقق $P' = P \cup \{c\}$ ومنه $P \leq P'$ وحسب ملاحظة سابقة

$V(f,P) \leqslant V(f,P') \Leftarrow V(f,P) \leqslant V(f,P_1') + V(f,P_2')$

بحيث $P' = P_1' \cup P_2'$ و $P_2' = \{y_0 = c < y_1 < \dots < y_m = b\}$ و $P_1' = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = c\}$

$$V(f,P) \leq V(f,P_1') + V(f,P_2') \leq \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$$

$$\Rightarrow ② \ldots \quad \overset{b}{\underset{a}{V}} f \leq \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f \quad < +\infty$$

$\Leftarrow$ f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ ومنه

من ① و ② نجد أن $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$

احد معايير للدالة ذات التغير المحدود:

① مبرهنة:

إذا كانت الدالة f معرفة ومطردة على $[a,b]$ فإنها دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = |f(b) - f(a)|$$

البرهان:

★ نفرض أن f دالة متزايدة على $[a,b]$.

ولنأخذ التجزئة العشوائية لـ $[a,b]$ ولتكن $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{P \in P[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{P \in P[a,b]} \left[|f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \ldots + |f(x_n) - f(x_{n-1})| \right]$$

وبما أن f متزايدة: $\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$$\Rightarrow = \sup_{P} \left[f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1}) \right]$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{P} \left[f(x_n) - f(x_0) \right] = \sup \left[f(b) - f(a) \right]$$

$$= f(b) - f(a)$$

★ من أجل f دالة متناقصة على $[a,b]$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup \left[|f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + |f(x_n) - f(x_{n-1})| \right]$$

وبما أن f دالة متناقصة $\Leftarrow \forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{P} [f(x_0) - f(x_n)] = \sup_{P} [f(a) - f(b)]$$

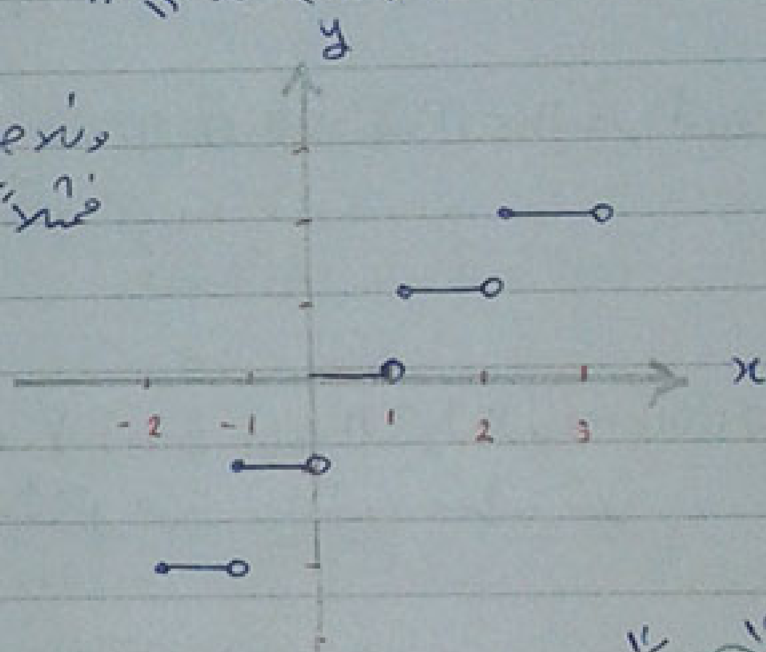
$$\Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} f = f(a) - f(b)$$

تذكرة بدالة الجزء الصحيح للمتغير x :

ليكن لدينا الدالة $f(x) = [x]$ دالة الجزء الصحيح لـ x

نلاحظ مايلي:

$$[x] = -3 \iff -3 \leq x < -2$$
$$[x] = -2 \iff -2 \leq x < -1$$
$$[x] = -1 \iff -1 \leq x < 0$$
$$[x] = 0 \iff 0 \leq x < 1$$
$$[x] = 1 \iff 1 \leq x < 2$$
$$[x] = 2 \iff 2 \leq x < 3$$
$$\vdots$$
$$[x] = n \iff n \leq x < n+1$$



ونلاحظ أن لها نقاط انقطاع من النوع الاول

فمثلاً عند ① يكون:

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} [x] = 0$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} [x] = 1$$

انتهت المحاضرة...