المحاضرة السادسة..

الخميس 2015/4/2..

نحو الفصل السابع (التكامل)..

التوابع الدرجية:

التابع الدرجي البسيط:

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

$$E_j = \{x \in X : \varphi(x) = \alpha_j\}$$

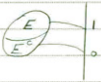
نقول عن التابع φ إنه دالة درجية أو دالة بسيطة على $(X, \mathcal{M})$ إذا كان من الشكل:

$$\varphi = \sum \alpha_j E_j$$

حيث $\bigcup E_j = X$

دالة المجموعة E: إذا كان (X, S) فضاء قيوساً و $E \subseteq X$ فإن $\chi_E(x)$ هي أبسط التوابع الدرجية البسيطة وتعرف كالتالي:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in E \\ 0 & \text{if } x \notin E \end{cases}$$



تدريب:

إذا كان (X, S) فضاء قيوساً والمجموعات المذكورة في الأسطر التالية قيوسة فإنه $\forall x \in X$:

1- $\chi_\varnothing(x) = 0$, $\chi_X(x) = 1$

2- $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$

3- $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$

4- $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x) - \chi_{A\cap B}(x)$

5- $\chi_{A\Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\cdot\chi_{A\cap B}(x)$. الحل صفحة ١٩٢

لنأخذ الفضاء المقيس $(\mu, \mathcal{M}, X)$ أو الفضاء القيوس $(X, \mathcal{M})$:
نقول عن التابع البسيط إنه قيوس إذا كانت $E_j \in \mathcal{M}$ وكانت قيوسة

ويكون:

$$\int \chi_E (x)\, d\mu(x) = \mu(E)$$

$$\int \chi_{A\cup B} (x)\, d\mu(x) = \int \chi_A (x)\, d\mu(x) + \int \chi_B (x)\, d\mu(x) - \int \chi_{A\cap B} (x)\, d\mu(x)$$

$$= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A\cap B)$$
$$= \mu(A\cup B)$$

مبرهنة: تمرين 79/4
إذا كان f تابعاً قيوساً وموجباً وإذا وضعنا:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{[2^n f(x)]}{2^n} & \text{if} \quad f(x) < n \\ n & \text{if} \quad f(x) \geq n \end{cases}$$

فإنّ:

$$f_n \nearrow f$$

أي: كل دالة قيوسة موجبة هي نهاية لمتتالية متزايدة من الدوال الدرجية.

تذكرة: إنّ الرمز $[y]$ يعني هنا الجزء الصحيح للعدد الحقيقي y وهو أكبر عدد صحيح k يصغر أو يساوي y إذن $k=[y]$.

هل: $[a+b] \overset{?}{=} [a]+[b]$

$[2a] \overset{?}{=} 2[a]$

لنأخذ مثال:

$$5 = [5] = [(2.4)+(2.6)]$$
$$= [2.4] + [2.6]$$

$$a = 2.5$$
$$2a = 5$$
$$5 = [2a] \geq 2[a] = 2 \times 2 = 4$$

D) التكامل (Integration):

لنأخذ $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيس والتطبيق $f: X \to \bar{\mathbb{R}}$ قيوس حيث $\bar{\mathbb{R}}$ مزودة بجبر بوريل.

• تكامل الدوال الدرجية:

إذا كانت f دالة درجية $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ فإننا نعرف تكامل f على X بالمساواة:

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$$

وإذا كانت F مجموعة قيوسة فإننا نعرّف تكامل f على F بـ:

$$\int_F f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap F)$$

إنّ التعريف الأول حالة خاصة من التعريف الثاني وذلك بوضع $X = F$

ملاحظة:

إذا كانت ψ, φ داليتين درجيتين في الفضاء $(X, \mathcal{A}, \mu)$ حيث $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ و $\psi = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{F_j}$ فإنّ:

$$\int_F (\varphi + \psi) \, d\mu = \int_F \varphi \, d\mu + \int_F \psi \, d\mu$$

$$\int_F c\varphi \, d\mu = c \int_F \varphi \, d\mu \quad ; c \geq 0$$

• تكامل الدوال غير الدرجية:

1- f دالة قيوسة موجبة:

لنأخذ $f \geq 0$ قيوسة وبالتالي فإنه توجد $\varphi_n \nearrow f$ ، (φ دالة درجية).

(كل دالة قيوسة موجبة هي نهاية لمتتالية من الدوال الدرجية)

وبالتالي فإنّ: $\int \varphi_n \to \sup \int \varphi_n$

فيكون: $\int f\,d\mu = \sup_{\varphi_n \nearrow f} \int \varphi_n \overset{?}{=} \sup_{0 \le \varphi \le f} \int \varphi\, d\mu$

2- إذا كانت $f^+ = \frac{|f| + f}{2} \geq 0$ ، $f^- = \frac{|f| - f}{2} \geq 0$

$|f| = f^+ + f^-$ ، $f = f^+ - f^-$ ، وإذا كان $\int |f| < \infty$ قلنا إن f مكمول.

يسمى f^+ القسم الموجب لـ f و f^- القسم السالب لـ f.

عندئذٍ إذا كان f متيوساً فإنّ f^- ، f^+ متيوسان والعكس صحيح أيضاً وكذلك فإنّ $|f|$ متيوس.

وبالتالي إذا كان f مكمول:

$$\int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f|\, d\mu$$

$$\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f\, d\mu$$

3- إذا كانت الدالة عقدية:

لتأخذ الدالة: $g = u + iv$

فإنه إذا كان $\int |g| < \infty$ (g مكمول):

$$\int |g|\, d\mu = \int u\, d\mu + \int v\, d\mu$$

- خواص التكامل:

إذا كان f مكمولة و g مكمولة نستطيع إثبات أنّ:

صحيح أيًا كانت قيم التابع عقدية $1-\ \int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$

أو حقيقية $2-\ \int c f\, d\mu = c \int f\, d\mu$

صحيحة الحقيقية $3-\ f \le g \Rightarrow \int f\, d\mu \le \int g\, d\mu$

$4-\ \left|\int f\, d\mu\right| \le \int |f|\, d\mu$

مبرهنة لوبيغ الأولى :

إذا كانت $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ متتالية متزايدة من التوابع القيوسة الموجبة وكانت $f_n \to f$ فإنّ :

$$\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$$ في الفضاء $\mathcal{L}^1$.

($\mathcal{L}^1$: فضاء الدوال الكمولة)

مبرهنة لوبيغ الثانية :

إذا كانت $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ متتالية من التوابع القيوسة وكانت f_n تتقارب نقطياً نحو f فإنّه :

$$\exists g \in \mathcal{L}^1 : |f_n| \leq g \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ويكون :

1- $f \in \mathcal{L}^1$

2- $\int |f_n - f| \, d\mu \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

3- $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$

توطئة فاتو :

إذا كانت (f_n) متتالية من التطبيقات القيوسة الموجبة فإنّ :

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$$

ملاحظة : من الممكن كتابة $\int_X f \, d\mu$ بالشكل $\int f \, d\mu$.

انتهت المحاضرة..