نظرية الفئات

المحاضرة التاسعة

١٣/٤/٢٠١٥م

الجداء والمجموع في الفئات

الجداء في الفئات: (تعميم لمفهوم الجداء الديكارتي)

تعريف: لتكن $\mathcal{C}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{C}$.
ولنفرض أن: $u_i : A \longrightarrow A_i$ مورفيزمات للفئة $\mathcal{C}$ لأجل كل $i\in I$
حيث $A \in ob(\mathcal{C})$.
نقول إن الثنائية (A, u_i) جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ إذا حققت الشرط:
- لأجل أية ثنائية $(B, (v_i : B \longrightarrow A_i)_{i\in I})$ من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathcal{C}$.

يوجد مورفيزم وحيد $v : B \longrightarrow A$ لأجله المخطط المرسوم تبديلي.
أي: $\forall i\in I : u_i \cdot v = v_i$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "v_i"'] & & A \arrow[dl, "u_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

* تدعى المورفيزمات u_i بالمورفيزمات الإسقاطية.

تذكرة: * التشاكل الإسقاطي العامري في فئة المودولات:

$$f_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1$$
$$(a, b) \longmapsto a$$

حيث $(M = M_1 \times M_2 , (f_i)_{i\in I})$ جداء لأسرة المودولات $(M_i)_{i\in I}$
حيث $I = \{1, 2\}$

* وأيضاً كمثال آخر:
$$f_3 : M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4 \longrightarrow M_3$$
$$(a,b,c,d) \longmapsto c$$
هو تشاكل إسقاطي حيث: $(M = M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4 \,,\, (f_i)_{i\in I})$

هو جداء لأسرة الوحدولات $(M_i)_{i\in I}$ حيث $I = \{1,2,3,4\}$

توضيح للتعريف: عندما $I = \{1,2,3\}$ يمكن أن نرسم المخطط:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "v"] \arrow[d, "v_1"'] \arrow[dr, "v_2"] \arrow[drr, "v_3"] & & A \arrow[dll, "u_1"'] \arrow[dl, "u_2"'] \arrow[d, "u_3"] \\
A_1 & A_2 & A_3
\end{tikzcd}$$

فيجب أن يكون v هو الوحيد الذي يحقق:

$u_1 . v = v_1$, $u_2 . v = v_2$, $u_3 . v = v_3$

ملاحظة: ليس من الضرورة أن يكون الجداء موجوداً بشكل عام في الفئات، لذا:

* نقول عن الفئة $\mathcal{C}$ إنها فئة جداء، إذا كانت كل أسرة من أشيائها تملك جداء.

* ونقول عن الفئة $\mathcal{C}$ إنها فئة جداءات منتهية، إذا كانت كل أسرة منتهية من أشيائها تملك جداء.

أمثلة: إن كل من الفئات التالية هي فئات جداء:

فئة المجموعات - فئة الزمر - فئة الزمر التبديلية - فئة الوحدولات.

Sets

مبرهنة:

لتكن $\mathscr{C}$ فئة، ولتكن $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathscr{C}$.

الشروط الآتية متكافئة:

① الثنائية $(A, (u_i : A \longrightarrow A_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$.

② التطبيق: $\Gamma : \mathscr{C}(X, A) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathscr{C}(X, A_i)$ الجداء الديكارتي

المعرف بالشكل: $\forall w \in \mathscr{C}(X,A) : \Gamma(w) = (u_i . w)_{i\in I}$

متباين وغامر وذلك لأجل كل $X \in ob(\mathscr{C})$.

الإثبات: $(2) \Leftarrow (1)$:

* إثبات أن Γ تطبيق:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "u_i . w"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

لتكن $w_1, w_2 \in \mathscr{C}(X,A)$ بحيث $w_1 = w_2$

يمكن تركيب u_i من اليسار:

$$u_i . w_1 = u_i . w_2 \quad \forall i \in I$$

$$(u_i . w_1)_{i\in I} = (u_i . w_2)_{i\in I}$$

$$\Gamma(w_1) = \Gamma(w_2)$$

ومنه Γ تطبيق.

* إثبات أن Γ متباين وغامر (تقابل):

لنعرف العلاقة: $\Gamma^{-1} : \prod_{i\in I} \mathscr{C}(X, A_i) \longrightarrow \mathscr{C}(X, A)$

لنأخذ عنصراً من المنطلق: $\forall (v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{C}(X, A_i)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "v_i"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

بما أن الأسرة (A, u_i) جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

فإنه حسب التعريف يوجد مورفيزم وحيد $v : X \longrightarrow A$

بحيث: $u_i . v = v_i \quad \forall i \in I$

إذاً لنعرّف Γ^{-1} كما يلي : $\Gamma^{-1}\left((v_i)_{i\in I}\right) = v$

فيكون Γ^{-1} تطبيق وضوحاً (لأنّ v وحيد حسب التعريف)

لنأخذ تركيب التطبيقين Γ^{-1} , Γ :

- إن : $\Gamma . \Gamma^{-1} : \prod_{i\in I} \mathcal{L}(X, A_i) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{L}(X, A_i)$
تطبيق.

أياً كان العنصر من المنطلق : $\forall (v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{L}(X, A_i)$

فإن :

$$\Gamma . \Gamma^{-1}\left((v_i)_{i\in I}\right) = \Gamma\left(\Gamma^{-1}\left((v_i)_{i\in I}\right)\right)$$

$$= \Gamma(v) = (u_i . v)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

$$\Longrightarrow \Gamma . \Gamma^{-1} = I_{\prod_{i\in I} \mathcal{L}(X, A_i)} \quad ① \quad \text{(صورة كل عنصر نفسه)}$$

- أيضاً : $\Gamma^{-1} . \Gamma : \mathcal{L}(X, A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, A)$
تطبيق.

أياً كان العنصر من المنطلق : $\forall v \in \mathcal{L}(X, A)$

فإن :

$$\Gamma^{-1} . \Gamma(v) = \Gamma^{-1}(\Gamma(v)) = \Gamma^{-1}\left((u_i . v)_{i\in I}\right) = v$$

$$\Longrightarrow \Gamma^{-1} . \Gamma = I_{\mathcal{L}(X, A)} \quad ② \quad \text{(صورة كل عنصر نفسه)}$$

من ① و ② نجد أن كلاً من Γ^{-1} , Γ تقابل ، ومنه Γ متباين وغامر.

(2) $\Leftarrow$ (1) : لنفرض أن Γ متباين وغامر.

لتكن $(v_i : B \longrightarrow A_i)_{i\in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathcal{C}$.

من أجل $X = B$ نجد أن: $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{C}(B, A_i)$

مستقر Γ

ولكون Γ غامر فإنه يوجد $v \in \mathcal{C}(B, A)$ بحيث $\Gamma(v) = (v_i)_{i\in I}$

ولكن حسب تعريف Γ يكون: $\Gamma(v) = (u_i . v)_{i\in I}$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "v_i"'] & & A \arrow[dl, "u_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

ومنه نجد أن: $(u_i . v)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$

$\Rightarrow u_i . v = v_i \quad \forall i \in I$

وبالتالي وجدنا v يحقق العلاقة (جعل المخطط تبديلي)

* إثبات الوحدانية:

لنفرض أن $w : B \longrightarrow A$ مورفيزم آخر للفئة $\mathcal{C}$ يحقق:

$u_i . w = v_i \quad \forall i \in I$

$\Longrightarrow (u_i . w)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$

$\Gamma(w) = (v_i)_{i\in I} = \Gamma(v)$

ولكن Γ متباين، ومنه $w = v$

ومنه فالأسرة (A, u_i) تشكل "جداء" للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

تمهيدية:

لتكن $\mathcal{C}$ فئة، ولتكن $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{C}$.
ولنفرض أن الثنائية $(A,(\pi_i:A\longrightarrow A_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ عندئذٍ:

1- أياً كان $i\in I$ يوجد مورفيزم $\alpha_i:A_i\longrightarrow A$ للفئة $\mathcal{C}$ يحقق: $\pi_i\cdot\alpha_i=I_{A_i}$

2- أياً كان $i\in I$ فإن المورفيزم الإسقاطي π_i إبيومورفيزم.

الإثبات: 1) بما أن الثنائية (A,π_i) جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$
فإن التطبيق: $\Gamma:\mathcal{C}(X,A)\longrightarrow\prod_{i\in I}\mathcal{C}(X,A_i)$

المعرف بالشكل: $\Gamma(\alpha)=(\pi_i\cdot\alpha)_{i\in I}$
متباين وغامر أياً كان $X\in ob(\mathcal{C})$

من أجل $X=A_i$ نجد: $\Gamma:\mathcal{C}(A_i,A)\longrightarrow\prod_{i\in I}\mathcal{C}(A_i,A_i)$

بما أنه لأجل كل $i\in I$ فإن: $I_{A_i}\in\mathcal{C}(A_i,A_i)$
فنجد أن: $(I_{A_i})_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\mathcal{C}(A_i,A_i)$
مستقر Γ

وبسبب كون Γ غامر فإنه يوجد: $\alpha_i:A_i\longrightarrow A\in\mathcal{C}(A_i,A)$
بحيث: $\Gamma(\alpha_i)=(I_{A_i})_{i\in I}$
ولكن حسب تعريف Γ: $\Gamma(\alpha_i)=(\pi_i\cdot\alpha_i)_{i\in I}$

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\pi_i\cdot\alpha_i"'] & A \arrow[d, "\pi_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

$$\Longrightarrow (\pi_i\cdot\alpha_i)_{i\in I}=(I_{A_i})_{i\in I}$$
$$\Longrightarrow \forall i\in I:\ \pi_i\cdot\alpha_i=I_{A_i}$$

وهو المطلوب.

ج) لدينا $\pi_i : A \longrightarrow A_i$.

لأجل كل $X \in ob(\mathcal{C})$ لنأخذ التطبيق :

$$\beta : \mathcal{C}(A_i, X) \longrightarrow \mathcal{C}(A, X)$$

$$\beta(f) = f.\pi_i$$

المعرف بالشكل :

ولنثبت أن β متباين .

ليكن $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{C}(A_i, X)$ بحيث : $\beta(\alpha_1) = \beta(\alpha_2)$

$$\alpha_1.\pi_i = \alpha_2.\pi_i$$

وحسب (1) يوجد : $\alpha_i : A_i \longrightarrow A$

يحقق : $\pi_i.\alpha_i = I_{A_i}$

يمكن أن نضرب α_i بطرفي العلاقة من اليمين :

$$\Longrightarrow (\alpha_1.\pi_i).\alpha_i = (\alpha_2.\pi_i).\alpha_i$$

$$\alpha_1.(\pi_i.\alpha_i) = \alpha_2.(\pi_i.\alpha_i)$$

$$\alpha_1.I_{A_i} = \alpha_2.I_{A_i} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

ومنه فالتطبيق β متباين ، والمورفيزم π_i إيبومورفيزم .

مبرهنة:

لتكن $\mathcal{C}$ فئة ، ولنفرض أن $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{C}$.

لنفرض أن: $(A, (u_i : A \longrightarrow A_i)_{i \in I})$

$(B, (v_i : B \longrightarrow A_i)_{i \in I})$

جداءين للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ عندئذٍ :

يوجد إيزومورفيزم $\alpha : B \longrightarrow A$

لأجله يكون المخطط المرسوم تبديلياً ، أي :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "v_i"'] & & A \arrow[dl, "u_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

$$u_i.\alpha = v_i \quad \forall i \in I$$

الإثبات:

* بما أن الثنائية (A, u_i) هي جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$.
عندئذٍ لأجل كل $X \in ob(\mathcal{C})$ فإن التطبيق:

$$\Gamma : \mathcal{C}(X, A) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{C}(X, A_i)$$

المعرف بالشكل: $\Gamma(w) = (u_i . w)_{i\in I}$

متباين وغامر.

ومنه لأجل $X = B$ يكون: $(v_i : B \longrightarrow A_i)_{i\in I} \in \underbrace{\prod_{i\in I} \mathcal{C}(B, A_i)}_{\text{مستقر } \Gamma}$

وبما أن Γ غامر فإنه يوجد $\alpha \in \mathcal{C}(B, A)$ بحيث: $\Gamma(\alpha) = (v_i)_{i\in I}$

ولكن حسب تعريف Γ لدينا: $\Gamma(\alpha) = (u_i . \alpha)_{i\in I}$

ومنه: $(u_i . \alpha)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$

$$\Longrightarrow \quad u_i . \alpha = v_i \qquad \forall i \in I$$

ومنه فالمخطط المعطى تبديلي.

(وجدنا مورفيزم $\alpha : B \longrightarrow A$ يحقق أن المخطط تبديلي، ولنثبت أنه إيزومورفيزم)

* أيضاً لدينا (B, v_i) جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$
ومنه لأجل كل $X \in ob(\mathcal{C})$ فإن التطبيق:

$$\bar{\Gamma} : \mathcal{C}(X, B) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{C}(X, A_i)$$

المعرف بالشكل: $\bar{\Gamma}(\theta) = (v_i . \theta)_{i\in I}$

متباين وغامر.

ومن أجل $X = A$ يكون: $(u_i : A \longrightarrow A_i)_{i\in I} \in \underbrace{\prod_{i\in I} \mathcal{C}(A, A_i)}_{\text{مستقر } \bar{\Gamma}}$

وبما أن $\bar{\Gamma}$ غامر فإنه يوجد $\beta \in \mathcal{H}(A,B)$ بحيث $\bar{\Gamma}(\beta) = (u_i)_{i\in I}$

ولكن حسب تعريف $\bar{\Gamma}$ لدينا: $\bar{\Gamma}(\beta) = (v_i . \beta)_{i\in I}$

ومنه: $(v_i . \beta)_{i\in I} = (u_i)_{i\in I}$

$$\Longrightarrow \quad v_i . \beta = u_i \quad \forall i \in I$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, shift left, "\alpha"] \arrow[dr, "v_i"'] & & A \arrow[ll, shift left, "\beta"] \arrow[dl, "u_i"] \\
& A_i &
\end{tikzcd}$$

* أصبح لدينا:

$$\alpha : B \longrightarrow A$$
$$\beta : A \longrightarrow B$$
$$\alpha . \beta : A \longrightarrow A$$
$$\beta . \alpha : B \longrightarrow B$$

— نلاحظ أنه:

$$u_i . (\alpha . \beta) = (u_i . \alpha) . \beta = v_i . \beta = u_i \quad \forall i \in I$$

ولكن نعلم أن: $u_i . I_A = u_i$

ومنه فإن: $u_i . (\alpha . \beta) = u_i . I_A$

وبما أنه u_i مورفيزم إسقاطي فهو إبيومورفيزم (حسب المبرهنة السابقة).

وبالتالي فإنه: $\alpha . \beta = I_A$ ★

— كذلك نلاحظ أنه:

$$v_i . (\beta . \alpha) = (v_i . \beta) . \alpha = u_i . \alpha = v_i$$

ولكن نعلم أنه: $v_i . I_B = v_i$

ومنه فإن: $v_i . (\beta . \alpha) = v_i . I_B$

وبما أنه v_i مورفيزم إسقاطي فهو إبيومورفيزم (حسب المبرهنة السابقة)

وبالتالي فإنه: $\beta . \alpha = I_B$ ★'

من ★ و ★' نجد أنه كلاً من α و β إيزومورفيزم.

نهاية المحاضرة التاسعة :)