

نظرية الفئات

الحاضرة التاسعة

2015/4/13

الجداء والمجموع في الفئات

الجداء في الفئات: (تعميم لمفهوم الجداء الديكارتي)

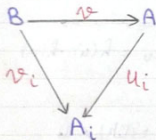
تعريف: لنكن I فئة و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة I . ولنفرض أن: $u_i: A \rightarrow A_i$ مورفيزمات للفئة I لأجل كل $i \in I$ حيث $A \in \text{ob}(I)$.

نقول إن الفئة $(A, u_i)_{i \in I}$ جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ إذا حققت الشرط:
لأجل أية ثنائية $(B, (v_i: B \rightarrow A_i)_{i \in I})$ من أشياء ومورفيزمات الفئة I .

يوجد مورفيزم وحيد $v: B \rightarrow A$

لأجله الحفظ المرسوم تبديلي

$$\forall i \in I : u_i \circ v = v_i$$



* تدعى المورفيزمات u_i بالمورفيزمات اليسقاطية.

تذكرة: * التاكل الإسقاطي العامري فئة المودولات:

$$f_i: M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$$

$$(a, b) \mapsto a$$

حيث $(M = M_1 \times M_2, (f_i)_{i \in I})$ جداء للأسرة المودولات $(M_i)_{i \in I}$ حيث $I = \{1, 2\}$

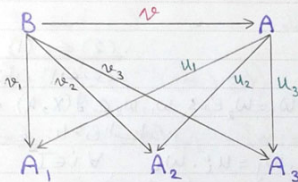
* وأيضاً كمثل آخر: $f_3 : M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4 \longrightarrow M_3$

$(a, b, c, d) \longmapsto C$

هوت مشاكل إسقاطي حيث: $(M = M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4, (f_i)_{i \in I})$

هو مبدأ لأسرة الودودات $(M_i)_{i \in I}$ حيث $I = \{1, 2, 3, 4\}$

توضيح للتعريف: عندما $I = \{1, 2, 3\}$ يمكن أن نرسم الخط:



فيجب أن يكون v هو الوحيد الذي يحقق:

$$u_1 \cdot v = v_1, \quad u_2 \cdot v = v_2, \quad u_3 \cdot v = v_3$$

ملحظة: ليس من الضرورة أن يكون الجداء موجوداً بشكل عام في الفئات، لذا:

* نقول عن الفئة لا إزافية جداء، إذا كانت كل أسرة من أسماؤها تمتلك جداء.

* ونقول عن الفئة لا إزافية جداءات مستوية، إذا كانت كل أسرة مستوية

من أسماؤها تمتلك جداء.

أنتباه: إن كل من الفئات التالية هي فئات جداء:

فئة المجموعات - فئة الزمر - فئة الزمر التبدلية - فئة الودودات

Sets

مبرهنة:

ليكن $\{A_i\}_{i \in I}$ أسرة من أشياء ماثلت \mathcal{A} .
 الشروط الآتية متكافئة:

(1) الشائبة $(A, \{u_i : A \rightarrow A_i\}_{i \in I})$ جداء للأسرة $\{A_i\}_{i \in I}$

(2) القليبية: $\Gamma : \mathcal{A}(X, A) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{A}(X, A_i)$

← الجداء الديكارتي

المعرف بالمثل: $\forall w \in \mathcal{A}(X, A) : \Gamma(w) = (u_i \cdot w)_{i \in I}$
 متباين وغامر وذلك لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathcal{A})$

البيانات: (1) \Leftrightarrow (2)

* إثبات أن Γ تطبيقي:

ليكن $w_1, w_2 \in \mathcal{A}(X, A)$ حيث $w_1 = w_2$
 يمكن تركيب u_i من اليسار:

$$u_i \cdot w_1 = u_i \cdot w_2 \quad \forall i \in I$$

$$(u_i \cdot w_1)_{i \in I} = (u_i \cdot w_2)_{i \in I}$$

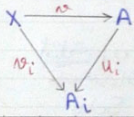
$$\Gamma(w_1) = \Gamma(w_2)$$

ومنه Γ تطبيقي.

* إثبات أن Γ متباين وغامر (تقابل):

لنعرف العلاقة: $\Gamma^{-1} : \prod_{i \in I} \mathcal{A}(X, A_i) \rightarrow \mathcal{A}(X, A)$

لنأخذ عنصراً من المثلت: $\forall (v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}(X, A_i)$



بأن الأسرة $(A, \{u_i\}_{i \in I})$ جداء للأسرة $\{A_i\}_{i \in I}$
 فإنه حسب التعريف يوجد مورفيزم $v : X \rightarrow A$
 حيث: $u_i \cdot v = v_i \quad \forall i \in I$

إذا الفَّرَف Γ^{-1} كما يلي :
 فيكون Γ^{-1} تطبيقياً وضموماً (لأن Γ وهدب العرِف) :

لنأخذ تركيب التطبيقين Γ^{-1}, Γ :

$$\Gamma \cdot \Gamma^{-1} : \prod_{i \in I} \mathcal{N}(X, A_i) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{N}(X, A_i) \quad \text{إن : - تطبيقي}$$

أياً كان العنصر من المطلق :
 فإن :

$$\begin{aligned} \Gamma \cdot \Gamma^{-1}((u_i)_{i \in I}) &= \Gamma(\Gamma^{-1}((u_i)_{i \in I})) \\ &= \Gamma(u) = (u_i \cdot u)_{i \in I} = (u_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Gamma \cdot \Gamma^{-1} = I_{\prod_{i \in I} \mathcal{N}(X, A_i)} \quad \text{① (صورة كل عنصر نفسه)}$$

$$\Gamma^{-1} \cdot \Gamma : \mathcal{N}(X, A) \longrightarrow \mathcal{N}(X, A) \quad \text{أيضاً : - تطبيقي}$$

أياً كان العنصر من المطلق :
 فإن :

$$\Gamma^{-1} \cdot \Gamma(u) = \Gamma^{-1}(\Gamma(u)) = \Gamma^{-1}((u_i \cdot u)_{i \in I}) = u$$

$$\Rightarrow \Gamma^{-1} \cdot \Gamma = I_{\mathcal{N}(X, A)} \quad \text{② (صورة كل عنصر نفسه)}$$

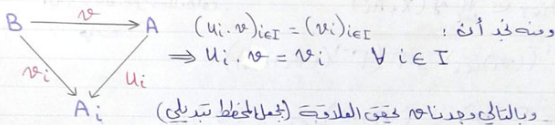
من ① و ② نجد أن كل من Γ, Γ^{-1} تقابل، ومنه Γ متباين وعكاس.

(2) \Leftarrow (1): لنفرض أن Γ متباين دعامر.

لتكن $(\nu_i: B \rightarrow A_i)_{i \in I}$ أسرة من مورفزمات الفئة \mathcal{A} .

من أجل $X = B$ نجد أن: $(\nu_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}(B, A_i)$ مستقر Γ

ولكون Γ دعامر فإننا نجد $\nu \in \mathcal{A}(B, A)$ حيث $\Gamma(\nu) = (\nu_i)_{i \in I}$ ولكن حسب تعريف Γ يكون: $\Gamma(\nu) = (u_i \cdot \nu)_{i \in I}$



* إثبات الوجودانية:

لنفرض أن $w: B \rightarrow A$ مورفزم آخر للفئة \mathcal{A} يحقق: $u_i \cdot w = \nu_i \quad \forall i \in I$

$$\Rightarrow (u_i \cdot w)_{i \in I} = (\nu_i)_{i \in I}$$

$$\Gamma(w) = (\nu_i)_{i \in I} = \Gamma(\nu)$$

ولكن Γ متباين، ومنه $w = \nu$

ومنه فالأسرة (A, u_i) تكو دعامر للأسرة $(A_i)_{i \in I}$

تمريرية:

ولكن لا فئة، ولكن $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أسياالفئة \mathcal{A} .
 ولنعرف أن الشائبة $(A, (\pi_i: A \rightarrow A_i)_{i \in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ كالتالي:

1- أيا كان $i \in I$ يوجد مورفيزم $\alpha_i: A_i \rightarrow A$
 للفئة لا يحقق: $\pi_i \circ \alpha_i = I_{A_i}$

2- أيا كان $i \in I$ فإن المورفيزم الإسقاطي π_i إبيومورفيزم.

الإثبات: (1) بما أن الشائبة (A, π_i) جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$
 فإن الطبيعي: $\Gamma: \mathcal{A}(X, A) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{A}(X, A_i)$

المعرفه بالمثل: $\Gamma(\alpha) = (\pi_i \circ \alpha)_{i \in I}$
 متباين دفاغر أيا كان $X \in \text{ob}(\mathcal{A})$

من أجل $X = A_i$ نجد: $\Gamma: \mathcal{A}(A_i, A) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{A}(A_i, A_i)$

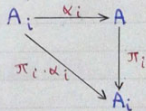
بأنه لأجل كل $i \in I$ فإن: $I_{A_i} \in \mathcal{A}(A_i, A_i)$
 فنجد أن: $(I_{A_i})_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}(A_i, A_i)$
شعر Γ

وسبب كون Γ فاسر فإنه يوجد: $\alpha_i: A_i \rightarrow A \in \mathcal{A}(A_i, A)$
 بحيث: $\Gamma(\alpha_i) = (I_{A_i})_{i \in I}$
 ولكن حسب تعريف Γ : $\Gamma(\alpha_i) = (\pi_i \circ \alpha_i)_{i \in I}$

$\Rightarrow (\pi_i \circ \alpha_i)_{i \in I} = (I_{A_i})_{i \in I}$

$\Rightarrow \forall i \in I: \pi_i \circ \alpha_i = I_{A_i}$

وهذا المطلوب.



(C) لدينا $\pi_i : A \rightarrow A_i$
 لأجل كل $x \in \text{ob}(A)$ لتأخذ التطبيق:

$\beta : \mathcal{A}(A_i, X) \rightarrow \mathcal{A}(A, X)$
 المعرف بالتك:
 $\beta(f) = f \cdot \pi_i$
 ولنثبت أن β متباين.

ليكن $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}(A_i, X)$ بحيث:
 $\alpha_1 \cdot \pi_i = \alpha_2 \cdot \pi_i$

وهب ① يوجد $\alpha_i : A_i \rightarrow A$:

حيث $\pi_i \cdot \alpha_i = I_{A_i}$:

يمكن أن نضرب α_i بطرفي المعادلة من اليمين:

$$\Rightarrow (\alpha_1 \cdot \pi_i) \cdot \alpha_i = (\alpha_2 \cdot \pi_i) \cdot \alpha_i$$

$$\alpha_1 \cdot (\pi_i \cdot \alpha_i) = \alpha_2 \cdot (\pi_i \cdot \alpha_i)$$

$$\alpha_1 \cdot I_{A_i} = \alpha_2 \cdot I_{A_i} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

دونه فالتطبيق β متباين، والمورفيزم π_i إيسوموريزم.

مرهنة:

لكن لا فئة، ولنفرض أن $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة \mathcal{A} .

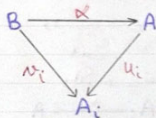
لنفرض أن: $(A, (u_i : A \rightarrow A_i)_{i \in I})$

$(B, (v_i : B \rightarrow A_i)_{i \in I})$

عبارتين للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ عندئذ:

يوجد إيزومورفيزم $\alpha : B \rightarrow A$

لأجله يكون المخطط المرسوم تبادلياً، أي:



$$u_i \cdot \alpha = v_i \quad \forall i \in I$$

الدلائل:

* بيان الثنائية (A, u_i) هي جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$
 عندئذٍ لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathcal{A})$ فإن التطبيق:
 $\Gamma : \mathcal{A}(X, A) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{A}(X, A_i)$

المعرف بالشكل : $\Gamma(w) = (u_i \cdot w)_{i \in I}$
 متباين وغامر .

ومنه لأجل $X = B$ يكون : $(v_i : B \longrightarrow A_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}(B, A_i)$
 مستقر Γ

وبأن Γ غامر فإنه يوجد $\alpha \in \mathcal{A}(B, A)$ بحيث $\Gamma(\alpha) = (v_i)_{i \in I}$
 ولكن حسب تعريف Γ لدينا : $\Gamma(\alpha) = (u_i \cdot \alpha)_{i \in I}$
 ومنه : $(u_i \cdot \alpha)_{i \in I} = (v_i)_{i \in I}$
 $\Rightarrow u_i \cdot \alpha = v_i \quad \forall i \in I$
 ومنه فالمخطط المعطى تبديلي .

وهبنا مورفيزم $\alpha : B \longrightarrow A$ يحقق أن المخطط تبديلي ، ولنسب أن α مورفيزم

* أيضاً لدينا (B, v_i) جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$
 ومنه لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathcal{A})$ فإن التطبيق:
 $\bar{\Gamma} : \mathcal{A}(X, B) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{A}(X, A_i)$

المعرف بالشكل : $\bar{\Gamma}(\theta) = (v_i \cdot \theta)_{i \in I}$
 متباين وغامر .

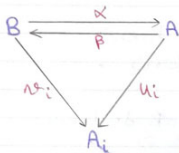
ومن أجل $X = A$ يكون : $(u_i : A \longrightarrow A_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}(A, A_i)$
 مستقر $\bar{\Gamma}$

دبيان $\bar{\Gamma}$ غير فائده يوجد $\beta \in \mathcal{N}(A, B)$ حيث $\bar{\Gamma}(\beta) = (u_i)_{i \in I}$

ولكن حسب تعريف $\bar{\Gamma}$ لدينا : $\bar{\Gamma}(\beta) = (v_i \cdot \beta)_{i \in I}$

$$(v_i \cdot \beta)_{i \in I} = (u_i)_{i \in I} \quad \text{ومنه :}$$

$$\Rightarrow v_i \cdot \beta = u_i \quad \forall i \in I$$



* أصبح لدينا : $\alpha : B \rightarrow A$

$\beta : A \rightarrow B$

$\alpha \cdot \beta : A \rightarrow A$

$\beta \cdot \alpha : B \rightarrow B$

— نلاحظ أنه :

$$u_i \cdot (\alpha \cdot \beta) = (u_i \cdot \alpha) \cdot \beta = v_i \cdot \beta = u_i \quad \forall i \in I$$

ولكن نعلم أنه : $u_i \cdot I_A = u_i$

$$u_i \cdot (\alpha \cdot \beta) = u_i \cdot I_A \quad \text{ومنه فإن :}$$

دبيان $\alpha \cdot \beta$ مورفيزم إسقاطي فهو مورفيزم (بالمبرهنة السابقة)

$$\alpha \cdot \beta = I_A \quad *$$

— كذلك نلاحظ أنه :

$$v_i \cdot (\beta \cdot \alpha) = (v_i \cdot \beta) \cdot \alpha = u_i \cdot \alpha = v_i$$

ولكن نعلم أنه : $v_i \cdot I_B = v_i$

$$v_i \cdot (\beta \cdot \alpha) = v_i \cdot I_B \quad \text{ومنه فإن :}$$

دبيان $\beta \cdot \alpha$ مورفيزم إسقاطي فهو مورفيزم (بالمبرهنة السابقة)

$$\beta \cdot \alpha = I_B \quad *$$

من * و * يُدّان كل من α و β مورفيزم.

نهاية المحاضرة التاسعة :