2015/4/9 د. سالم طالب المحاضرة /2/

Topology of the Line طوبولوجيا المستقيم

I) تعريف الفضاء الطوبولوجي / أمثلة / إعادة للتذكير

II) طوبولوجيا المستقيم . 1 تعريف أنواع المجالات في $\mathbb{R}$.

2 تعريف النقط الداخلية لمجموعة A من $\mathbb{R}$. $\boxed{A^\circ}$

3 تعريف المجموعة المفتوحة من $\mathbb{R}$.

4 تعريف نقط التجمع (التراكم / الغاية) في $\mathbb{R}$.

مبرهنة / كل مجموعة A محدودة وغير منتهية في $\mathbb{R}$ تمتلك نقطة تجمع واحدة على الأقل لـ A

5 المجموعة المغلقة في $\mathbb{R}$

مبرهنة / A مغلقة في $\mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$ A تحوي نقاط تجمعها $(A' \subset A)$

تعريف الفضاء الطوبولوجي : مجموعة جميع أجزاء X

تمهيد : لتكن $X \neq \emptyset$ ، $P(X)$

$X = \{1,2,3\}$

$P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\}$

حيث n عدد عناصر X $\Rightarrow 2^3 = 2^n = 8$ عدد عناصر $P(X)$

لو أخذنا مجموعة من أجزاء X

$$A = \{\emptyset, \{1\}, X\}$$

A عبارة عن أسرة من المجموعات

مثلا $\{1\} \in P(X)$

"أي عنصر من عناصر $P(X)$"

$$A = \{A_i : i \in I\}$$

$\{\phi, X\}$, $\{\{1\}, \{2\}\}$,(نشرح المجموعات من أجزاء X)

التعريف: إذا كانت $X \neq \phi$ و τ عائلة من أجزاء X نقول عن τ إنها تشكل طبولوجيا على X إذا تحققت الشروط الثلاث

1/ $\phi, X \in \tau$ "كلاهما من τ"

2/ $\forall A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$ اي كل عنصرين من τ تقاطعهما ينتمي لـ τ

3/ $\forall A_i \in \tau,\ i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ اجتماع عائلة منه

وبالتالي نرمز بـ (X, τ) فضاء طبولوجي.

شرح/ لو كانت X فيها ثلاث عناصر P(X) تسمى الطبولوجيا المتقطعة

هل تحقق شروط الطبولوجيا "الشروط الثلاث محققة"

لإثبات ان التقاطع موجود "ينتمي لـ τ" نستعين بالجدول

يجب ان يكون كل الناتج ينتمي لـ τ

مثال/ $X = \{1,2,3\}$

1) $\tau = P(X)$

اثبت ان τ تشكل طبولوجيا على X ونسمي الطبولوجيا المتقطعة

$\cap$	

,

$\cup$	

- دائماً ϕ ، $X \in \tau$ بأي طوبولوجي
- العناصر ضمنها تسمى مجموعات A مجموعة مفتوحة في τ $\Leftrightarrow$ $A \in \tau$

2) $\tau = \{\phi, X\}$

إذن τ تمثل طوبولوجيا على X ، تدعى الطوبولوجيا التافهة

التقاطع $= \phi$ ، الاتحاد $= X$

3) $\tau = \{\phi, \{1\}, X\}$

إذن τ تمثل طوبولوجيا على X

4) $\tau = \{\phi, A, A^c, X\}$

A^c هي المتممة ; حيث $A \subseteq X$

$\bar{A}$

مثلاً لو كانت $A = \{1\}$ فإن $A^c = \{2,3\}$

إذن τ تمثل طوبولوجيا على X.

5) $\tau = \{\phi, X, \{1\}, \{2\}\}$

$\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\}$

$\{1,2\} \notin \tau$

إذن τ ليست طوبولوجيا على X.

ملاحظة: نسمي عناصر الطوبولوجيا τ هي مجموعات مفتوحة

كل مجال هو مجموعة، العكس ليس صحيح بالضرورة

المجال المفتوح هو مجموعة مفتوحة

المجموعة المفتوحة ليست مجال مفتوح فقط ممكن تكون اتحاد مجالين مفتوحين

* الطوبولوجي هي مجموعة مجموعات لا يعرف طولها ولكن يجب ان تكون اصنافها من عناصر X ولكنها اجزاء من $P(X)$

أنواع المجالات

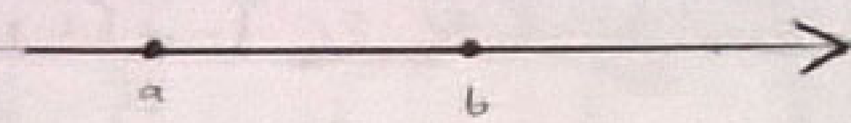
مجال مغلق — نصف مفتوح نصف مغلق — مجال مفتوح

1) $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$

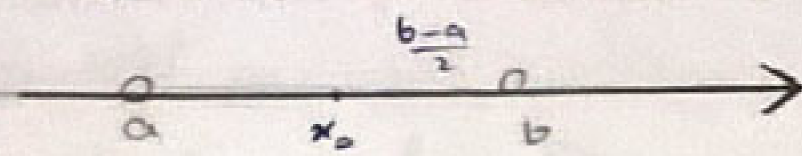
2) $[a,+\infty[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $]-\infty,b]$,
$]-\infty,+\infty[$.

"تعريفاً" $[a,b] = \{x\in\mathbb{R} \ : a\leq x\leq b\}$

"تمثيله على المحور"



$]a,b[= \{x\in\mathbb{R} \ : a<x<b\}$



$I =]a,b[$

مجال محدود عكس تعريف سابق علي

طول المجال $|b-a|$ المسافة

المركز $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$

نصف قطر المجال $r = \dfrac{b-a}{2}$

x ينتمي للمجال إذا بعدها عن المركز أصغر من نصف القطر

$I =]x_0-r , x_0+r[$

- إذا كان

$x\in I \Rightarrow x_0-r < x < x_0+r$

$-r < x-x_0 < r$

$|x-x_0| < r$

★ أي مجموعة في $\mathbb{R}$ هي إما على اتحاد مجالات أو تقاطعها

$A \subset \mathbb{R}$

$A = \{1\} = [1,1] \subset \mathbb{R}$

$A =]1,2[\cup]3,4[\subset \mathbb{R}$

$A = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, 1/n] = [1,1] \cup [1/2, 1/2]$

مثلاً $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$

تعريف النقط الداخلية لمجموعة $A \subset \mathbb{R}$

نقول عن x إنها نقطة داخلية للمجموعة A إذا وجد مجال مفتوح يحوي x ومحتوى في A.

تعريف آخر: "إذا وجد مجال مفتوح مركزه x ومحتوى في A"

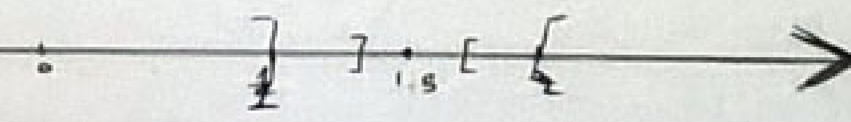
نرمز لمجموعة النقاط الداخلية لمجموعة A بـ $\mathring{A}$

المجال المفتوح كل نقطه نقطة داخلية

$A =]1,2[$

كل نقطة من نقاط هذا المجال هي بالضرورة نقطة داخلية

لو أخذنا $x_0 = 3/2 = 1.5$



$1.5 \in]1\tfrac{1}{4}, 1\tfrac{3}{4}[\subset A$

الواحد ليس نقطة داخلية لا نستطيع إيجاد مجال مفتوح يحويها

$\mathring{A} = \mathring{[1,2[} =]1,2[$

SABBAGH STATIONERY

$Z^\circ = Q^\circ = N^\circ = \phi$

السبب: لأن Q كثيفة لذلك لا أستطيع إيجاد مجال يحوي النقطة

من المجال سوف يحوي لنقاط من R

ولأن Q ليست مبعثرة و N أيضاً

R مبعثرة.

يجب أن يكون كل من المجال محتوى بالمجموعة

$(R \setminus Q)^\circ = \phi$

$A = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\} \cup \{0\}$

لو اعتبرنا الصفر نقطة داخلية لوجدنا مجال يحويها هل كل مجال من A؟ لا. ليست ولا واحدة منهم نقطة داخلية

طالما نعرف عن اجتماع المجالات ⇐ كل اجتماع هو نقط ⇐ لا يوجد نقاط داخلية

$A =]1,2[\cup]3,4[$

$A^\circ = A$ كل النقاط هنا هي داخلية مثلاً

تعريف المجموعة المفتوحة: (1)

نقول عن $\boxed{\text{المجموعة}}$ $A \subset R$ إنها مجموعة مفتوحة إذا كانت جميع نقاطها داخلية.

$A = A^\circ \Longleftrightarrow$

(2) تعريف آخر: نقول عن المجموعة $A \subset R$ إنها مجموعة مفتوحة:

$\forall x \in A \quad , \quad \exists \; a, b \in R \quad : x \in]a, b[\subset A$

"أستطيع إيجاد مجال يحوي النقطة ومحتوى بالمجموعة" (3)

$\forall x \in A \quad , \exists r > 0 \quad : \quad x \in]x-r, x+r[\subset A$

"اعتبرنا x مركز وأخذنا نصف القطر"

(4) بدلاً

$\exists \varepsilon > 0 \quad : \quad x \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$

و ε عدد حقيقي موجب صغير

- المجالات المفتوحة:

$\phi =]a,a[$, $]a,b[$

$]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $]-\infty,+\infty[$

هذه المجالات هي مجموعات مفتوحة.

$A =]2,3[\cup]4,5[$ مجموعة مفتوحة تحقق التعريف

نتائج:

[1] تقاطع مجالين مفتوحين هو مجال مفتوح أو مجموعة خالية

"اذا اعتبرنا الـ $\{\phi\}$ مجال مفتوح فصحيح"

وبالتالي

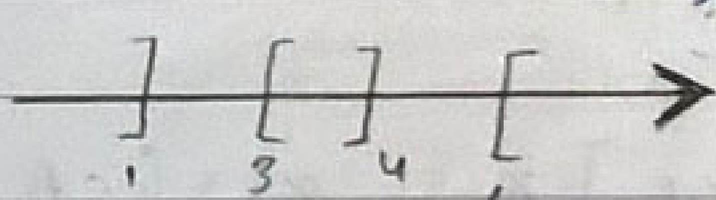
تقاطع "عدد منتهي" من المجالات المفتوحة هو مجال مفتوح

عموماً من اكثر من مجالين
كلام مجالات/ازرق/ن/n

[2] تقاطع مجموعتين مفتوحتين في $\mathbb{R}$ هو مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$

[3] تقاطع عدد منتهي من المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ هو مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$

[4] اجتماع أي عائلة من المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ هو مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$. "بالنسبة للاجتماع حتى لو كان عدد لا نهائي من المجموعات"



(5) $A = \bigcup \,]a_i , b_i[$ مجموعة مفتوحة

المجموعة المفتوحة عكس التعريف بإجتماع مجالات

(6) تقاطع عدد غير منتهي من المجالات المفتوحة ليس بالضرورة أن يكون مجال مفتوح

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\} = [0,0]$$

كم بالسيو

هذه المجالات غير منتهية $]-1,1[\quad]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\quad]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}[\quad -$

التقاطع هو ... المجموعة الصفرية $\{0\}$ وهي ...

مجال مغلق $[0,0]$

مجموعات غير مفتوحة:

$$R^{+} = [0,+\infty[$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$$

$$A = [a,b[$$

التوبولوجيا.

ملاحظات بالتوبولوجي

"المجال المفتوح هو مجموعة

المجموعة المفتوحة ليست مجال بالضرورة."

"التوبولوجيا R للمجموعات المفتوحة"

$X = R$ المجالات هي كل المجموعات المفتوحة في R

ان الشرط الأول محقق

تقاطع مجموعتين مفتوحتين هو مجموعة مفتوحة

الاجتماع لمجموعات مفتوحة هو مجال مفتوح.

المجموعات المفتوحة في R تشكل توبولوجيا

SABBAGH STATIONERY