صيغ كوشي التكاملية

مبرهنة

بفرض $f(z)$ تابع تحليلي على منطقة D ونفرض γ منحني بسيط مغلق واقع في D ونفرض $a \in D$ حيث a واقعة داخل المنحني γ

عندئذ: للحفظ

$$\boxed{\begin{aligned} &① \quad \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i\, f(a) \\ &② \quad \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a) \end{aligned}}$$

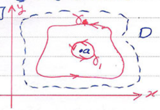
الاثبات:

① نلاحظ أن التابع $\frac{f(z)}{z-a}$ تحليلي على D باستثناء النقطة a

بفرض γ_1 منحني دائرة مركزها a ونصف قطرها r بحيث γ_1 واقعة تماماً داخل γ أي

$$\gamma_1(t) = r e^{it} + a \quad : t \in [0, 2\pi]$$

ومنه حسب مبرهنة



$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it}+a)}{re^{it}} \cdot i r e^{it}\,dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} f(re^{it}+a)\,dt$$

نجعل $r \to 0$ فنجد

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = i \int_0^{2\pi} f(a)\,dt = 2\pi i\, f(a)$$

#

②

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

نشتق هذه العلاقة بالنسبة لـ a فنجد:

$$f'(a) = \frac{1!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz$$

$$f''(a) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz$$

/ /

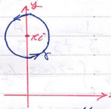
$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

تمرين: احسب التكاملات التالية

1) $I_1={}_{\gamma}\int\frac{z^2e^z}{z-\pi i}\,dz \quad : \gamma(t)=e^{it}+\pi i \quad ; t\in[0,2\pi]$

الحل نضع $f(z)=z^2e^z$ فنلاحظ أن $f(z)$ تحليلي $\forall z$

و $a=\pi i$ نقطة شاذة



ومنه حسب صيغة كوشي التكاملية نجد $\frac{f(z)}{z-\pi i}$

$$\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=2\pi i\,f(a)$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma}\frac{z^2e^z}{z-\pi i}\,dz=2\pi i\,f(\pi i)$$

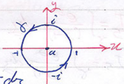
$$=2\pi i(\pi i)^2e^{\pi i}=2\pi^3 i$$

#

$\boxed{2}$ $I_2=\int_{\gamma}\frac{z^2+1}{z}\,dz \quad : \gamma(t)=e^{it} \quad : t\in[0,2\pi]$

نضع $f(z)=z^2+1$

$$I_2=\int_{\gamma}\frac{z^2+1}{z}\,dz=2\pi i\,f(0)=2\pi i$$



طريقة ثانية:

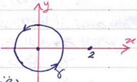
$$I_2=\int_{\gamma}\frac{z^2+1}{z}\,dz=\int_{\gamma}\left(z+\frac{1}{z}\right)dz=\int_{\gamma}z\,dz+\int_{\gamma}\frac{1}{z}\,dz$$

$$=0+2\pi i=2\pi i$$

#

$\boxed{3}$ $I_3=\int_{\gamma}\frac{\cos z}{z^2-2z}\,dz \quad : \gamma(t)=e^{it} \quad : t\in[0,2\pi]$

$$I_3=\int_{\gamma}\frac{\left(\frac{\cos z}{z-2}\right)}{z}\,dz$$



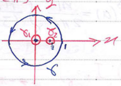
نضع $f(z)=\frac{\cos z}{z-2}$

نجد أن $f(z)$ تحليلي داخل γ ومنه حسب صيغة كوشي

$$I_3=2\pi i\,f(0)=2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right)=-\pi i$$

#

4] $I_4 = \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2 - \frac{z}{2}}\, dz \quad : \gamma(t) = e^{it} : t \in [0, 2\pi]$



$\int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$ حسب مبرهنة كوشي

$$I_4 = \int_{\gamma_1} \frac{\left(\frac{\cos z}{z - \frac{1}{2}}\right)}{z}\, dz + \int_{\gamma_2} \frac{\left(\frac{\cos z}{z}\right)}{z - \frac{1}{2}}\, dz$$

$$= 2\pi i \left(\frac{\cos(0)}{0 - \frac{1}{2}}\right) + 2\pi i \left(\frac{\cos \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = -4\pi i + 4\pi i \cos \tfrac{1}{2}$$

طريقة ثانية

$$\frac{1}{z^2 - \frac{1}{2} z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - \frac{1}{2}} = \frac{-2}{z} + \frac{2}{z - \frac{1}{2}}$$

ومنه

$$I_4 = \int_\gamma \frac{-2\cos z}{z}\, dz + \int_\gamma \frac{2\cos z}{z - \frac{1}{2}}\, dz$$

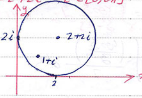
$$= 2\pi i (-2\cos(0)) + 2\pi i \left(2 \cos \tfrac{1}{2}\right) = -4\pi i + 4\pi i \cos \tfrac{1}{2}$$

\#

5] $I_5 = \int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^2}\, dz : \gamma(t) = e^{it} + 1 : t \in [0, 2\pi]$

$$I_5 = \int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(1) = 2\pi e i$$

6] $I_6 = \int_\gamma \frac{2z^4 + 1}{(z-1-i)^4}\, dz : \gamma(t) = 2e^{it} + 2 + 2i : t \in [0, 2\pi]$



نضع $f(z) = 2z^4 + 1$ عندئذ نلاحظ أن $a = 1+i$

نقطة شاذة من المرتبة الرابعة للتابع

$\frac{f(z)}{(z-1-i)^4}$ وواقعة داخل γ

ومن صيغة كوشي التكاملية

$$I_6 = \int_\gamma \frac{2z^4 + 1}{(z-1-i)^4}\, dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(1+i)$$

$$= \frac{2\pi i}{3!}\left(48(1+i)\right) = -16\pi + 16\pi i$$

$: f'''(z) = 48z$

\#

تمرين: أوجد القانون العام للتكامل:

$$I_n = \int_\gamma \frac{e^z}{z^n}\,dz : \gamma(t) = e^{it} ; t\in[0,2\pi] ; n\in\mathbb{Z}$$

الحل: نميز حالتين:

① $n\le 0$ عندئذ $e^z z^{-n}$ تحليلي داخل γ ويكون $I_n = 0$
حسب مبرهنة كوشي

② $n>0$ عندئذ حسب صيغ كوشي التكاملية يكون

$$I_n = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \quad ; f(z)=e^z$$

سؤال: ماذا لو كانت النقطة الشاذة a واقعة على المنحني γ؟

لنحسب التكامل التالي: $I = \int_\gamma \frac{z}{z-1}\,dz : \gamma(t)=e^{it} : t\in[0,2\pi]$

نأخذ دائرة مركزها مركز الدائرة السابقة ونصف قطرها أكبر
وليكن $r_1 = 2$ ومنه حسب مبرهنة

$$\int_\gamma = \int_{\gamma_1} = 2\pi i$$

ومنه تكون النتيجة: إذا كانت النقطة الشاذة واقعة على المنحني γ فنعتبرها داخل γ.

وظيفة: أوجد التكاملات التالية:

$$I_1 = \int_\gamma \frac{e^z}{z^3+z}\,dz \quad : \gamma(t) = 2e^{it} : t\in[0,2\pi]$$

$$I_2 = \int_\gamma \frac{dz}{z^4-1} \quad : \gamma(t) = e^{it}+1 : t\in[0,2\pi]$$

$$I_3 = \int_\gamma \frac{2z+1}{(z-1)(z-2)}\,dz \quad : \gamma(t) = 2e^{it}+2+i : t\in[0,2\pi]$$

أوجد القانون العام للتكامل

$$I_n = \int \frac{z^2+1}{(z+i)^n}\,dz \quad : \gamma(t) = 2e^{it} : t\in[0,2\pi] ; n\in\mathbb{Z}$$

انتهت المحاضرة الخامسة