2015/4/10 المحاضرة العاشرة

تذكرة (توضيح مفاهيم).

⊛ اذا كان $f(z)=\ln|z|+i\theta$ حيث θ هي زاوية z المنتمية إلى $]-\pi,\pi]$
فيكون f تحليلي على $\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$

⊛ $g(z)=Ln(z)=\ln|z|+i\,Arg(z)$ حيث $0\leq Arg(z)<2\pi$
يكون g تحليلي على $\mathbb{C}\setminus[0,\infty[$

مثال $Ln(1+z)$ غير قابل للنشر وفقه مالك لوران
لأنه غير تحليلي عنده عندما يكون $0\leq Arg(z)<2\pi$.

تمرين: انشر التابع التالي وفقه مالك لوران $f(z)=\frac{1}{3-z}$

التابع تحليلي على $\mathbb{C}\setminus\{3\}$ فهو قابل للنشر وفقه مالك لوران

$$f(z)=\frac{1}{3(1-\frac{z}{3})}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(\frac{z}{3})}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

النشر صحيح عندما $|\frac{z}{3}|<1 \Rightarrow |z|<3$

أو النشر صحيح في $D(0,3)$.

تمرين: انشر التابع $f(z)=\frac{1}{z}$ في جوار $z=2i$

الحل التابع تحليلي على $\mathbb{C}^*$

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-2i)+2i}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{z-2i}{2i}\right)}$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2i}{2i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2i)^{n+1}}(z-2i)^n$$

النشر صحيح $\forall z\in D(2i,2)$ أي $|z-2i|<2$

تمرين: انشر التابع $f(z)=\dfrac{1}{z^2+3z+2}$ وفق مال لوران ثم بجوار i.

الحل نفرق الكسر

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}\Rightarrow A=1,\ B=-1$$

تنبيه: إذا لم يكن في الامتحان وقت لاستخراج الثوابت نبقيها ثوابت وننشر وفقها من لا تذهب علامة النشر.

التابع تحليلي على $\mathbb{C}\setminus\{-1,-2\}$

$$f(z)=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$D(0,1)\cap D(0,2)=D(0,1)$ والنشر صحيح في

النشر بجوار (i):

$$f(z)=\frac{1}{1+z}-\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-i)+(i+1)}-\frac{1}{(z-i)+(i+2)}$$

$$=\frac{1}{(i+1)}\ \frac{1}{1+\left(\frac{z-i}{1+i}\right)}-\frac{1}{i+2}\ \frac{1}{1+\left(\frac{z-i}{2+i}\right)}$$

$$=\frac{1}{i+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(i+1)^n}-\frac{1}{i+2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(i+2)^n}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-i)^n\left(\frac{1}{(i+1)^{n+1}}-\frac{1}{(i+2)^{n+1}}\right)$$

والنشر صحيح في $D(i,\sqrt{2})$

أي $\forall z\in D(i,\sqrt{2})$

انتهت المحاضرة العاشرة