نمذجة رياضية

المحاضرة السادسة

٢٠١٥/٣/٣٠

9 مسألة التفتيش:

لدى شركة مرتبتان للمفتشين: المرتبة الأولى، والمرتبة الثانية.
والمطلوب إسناد مهمة ضبط الجودة لهم، وينبغي على الأقل تدقيق 1800 قطعة يومياً خلال 8 ساعات عمل.
حيث يستطيع مفتشو المرتبة الأولى تدقيق القطع بمعدل 25 قطعة في الساعة وبدقة 98%.
أما مفتشو المرتبة الثانية فيستطيعون تدقيق القطع بمعدل 15 قطعة في الساعة وبدقة 95%
إن معدل أجر مفتش المرتبة الأولى 400 ليرة / ساعة
في حين أن معدل أجر مفتش المرتبة الثانية 300 ليرة / ساعة
وفي كل مرة يخطئ المفتش تتكلف الشركة 200 ليرة.
حيث يوفر لدى الشركة من مفتشي المرتبة الأولى 8 مفتشين
ومن مفتشي المرتبة الثانية 10 مفتشين.
وترغب الشركة بتحديد الإسناد الأمثل للمفتشين لجعل كلفة التفتيش أصغرية.

تشكيل النموذج الرياضي:

نفرض x_1 عدد المفتشين من المرتبة الأولى المكلفين بالعمل.
x_2 عدد المفتشين من المرتبة الثانية المكلفين بالعمل.

لدينا قيود عدد المفتشين:

$$x_1 \leq 8$$
$$x_2 \leq 10$$

Scanned by CamScanner

شرط عدد القطع: $8(25x_1 + 15x_2) \geq 1800$

أو $5x_1 + 3x_2 \geq 45$

الأجر المدفوع للمفتش من المرتبة الأولى في الساعة 400.

خسارة خطأ هذا المفتش في الساعة = نسبة الخطأ × عدد القطع × خسارة القطعة الواحدة

أي: $200(25)(0.02)$

وبالتالي تكلفة المفتش من المرتبة الأولى في الساعة هي:

$$400 + 200(25)(0.02) = 500$$

الأجر المدفوع للمفتش من المرتبة الثانية في الساعة 300.

خسارة خطأ هذا المفتش في الساعة: $200(15)(0.05)$

وبالتالي تكلفة المفتش من المرتبة الثانية في الساعة هي:

$$300 + 200(15)(0.05) = 450$$

ومنه التكلفة الكلية في الساعة: $500x_1 + 450x_2$

ولكن لدينا 8 ساعات عمل، وبالتالي يكون تابع الهدف:

$$L = 8(500x_1 + 450x_2)$$

ومنه فالنموذج الرياضي: أوجد القيمة الصغرى للتابع:

$$L = 4000x_1 + 3600x_2 \longrightarrow \text{Min}$$

ضمن الشروط:

$$5x_1 + 3x_2 \geq 45$$
$$x_1 \leq 8$$
$$x_2 \leq 10$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Scanned by CamScanner

البرامج الخطية المرافقة

إن كل برنامج خطي يمتلك برنامج مرافق، بحيث أنه إذا وجد حل لأحد البرنامجين فهناك حل للآخر، حيث تتساوى قيمة تابعي الهدف للبرنامجين عند الحل الأمثل.
وتكون الحاجة لإيجاد البرنامج المرافق ضرورية في العديد من المسائل، وخاصة في الحالة التي يكون فيها عدد المتغيرات أقل من عدد القيود.

تشكيل البرنامج المرافق:

* لنفرض أنه لدينا برنامج خطي يتكون من تابع هدف في صورة تعظيم Max وشروط مقيدة في صورة أقل أو يساوي ($\leq$).
نسمي البرنامج الأصلي ويأخذ الشكل التالي:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \longrightarrow Max$$
$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$
$$x_i \geq 0 \quad ; \quad i = \overline{1,n}$$

* إن البرنامج المرافق للبرنامج السابق يعطى بالشكل التالي:

$$L = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \longrightarrow Min$$
$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1$$
$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m \geq c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \geq c_n$$
$$y_i \geq 0 \quad ; \quad i = \overline{1,m}$$

Scanned by CamScanner

/ /

طريقة بناء النموذج المرافق:

1) إذا كان تابع الهدف في البرنامج الأصلي بصورة تعظيم (تقليل)
فإن تابع الهدف في البرنامج المرافق بصورة تقليل (تعظيم)

2) يقابل كل شرط (قيد) في البرنامج الأصلي متغيراً في البرنامج المرافق.
ويقابل كل شرط (قيد) في البرنامج المرافق متغيراً في البرنامج الأصلي.

3) إذا كان تابع الهدف في أي من البرنامجين بصورة تعظيم Max ، فإن القيود تكون بصورة أقل أو تساوي ($\leq$).
أما إذا كان تابع الهدف في أي من البرنامجين بصورة تقليل Min ، فإن القيود تكون بصورة أكبر أو تساوي ($\geq$)

4) معاملات تابع الهدف في البرنامج المرافق هي قيم الطرف الأيمن لشروط البرنامج الأصلي.
وقيم الطرف الأيمن لشروط البرنامج المرافق هي معاملات تابع الهدف في البرنامج الأصلي.

5) إذا كان عدد القيود m وعدد المتحولات n في البرنامج الأصلي.
فإن عدد القيود يصبح n وعدد المتحولات يصبح m في البرنامج المرافق.

6) معاملات المتحولات في شروط البرنامج المرافق هي نفسها معاملات المتحولات في شروط البرنامج الأصلي، مع تبديل معاملات الأسطر والأعمدة.
وهذا يعني أن معاملات السطر i في الشروط المقيدة للبرنامج الأصلي هي نفسها معاملات العمود i في الشروط المقيدة للبرنامج المرافق.

* يوضّح الجدول التالي ما سبق:

Scanned by CamScanner

		البرنامج الأصلي			الطرف الأيمن ≤	تابع الهدف للمرافق
		x_1	x_2 ----------	x_n		
البرنامج المرافق	y_1	a_{11}	a_{12} ----------	a_{1n}	b_1	$b_1 y_1$ +
	y_2	a_{21}	a_{22} ----------	a_{2n}	b_2	$b_2 y_2$ +
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮ +
	y_m	a_{m1}	a_{m2} ----------	a_{mn}	b_m	$b_m y_m$
الطرف الأيمن ≥		c_1	c_2 ----------	c_n		
تابع الهدف للأصلي		$c_1 x_1 +$	$c_2 x_2 +$ ----------	$+ c_n x_n$		

مثال: أوجد النموذج المرافق للنموذج الخطي التالي: (سؤال امتحان)

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \longrightarrow Max$$

ضمن الشروط:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \leq b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \geq b_2$$
$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل: نلاحظ أن تابع الهدف هو تابع تعظيم Max، وبالتالي يجب أن تكون جميع القيود من الشكل ≤، حتى نستطيع إيجاد النموذج المرافق.

Scanned by CamScanner

يمكن تحليل الشرط الثالث إلى شرطين:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3$$

فيصبح النموذج لدينا:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \longrightarrow Max$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الآن نضرب الشروط من الشكل ($\geq$) بـ (-1) لتحويلها إلى الشكل ($\leq$) فيصبح النموذج:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \longrightarrow Max$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \qquad y_1$$
$$-a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \leq -b_2 \qquad y_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3 \qquad y_3^+$$
$$-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \leq -b_3 \qquad y_3^-$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

وبالتالي يكون النموذج المرافق:

$$L = b_1y_1 - b_2y_2 + b_3y_3^+ - b_3y_3^- \longrightarrow Min$$

$$a_{11}y_1 - a_{21}y_2 + a_{31}(y_3^+ - y_3^-) \geq c_1$$
$$a_{12}y_1 - a_{22}y_2 + a_{32}(y_3^+ - y_3^-) \geq c_2$$
$$a_{13}y_1 - a_{23}y_2 + a_{33}(y_3^+ - y_3^-) \geq c_3$$
$$y_1, y_2, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

Scanned by CamScanner

تمارين: (لم تحلها الدكتورة)

1 أوجد البرنامج المرافق للبرنامج التالي:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \longrightarrow Max$$

ضمن الشروط:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل: نلاحظ أن تابع الهدف هو تابع تعظيم Max وبالتالي يجب أن تكون الشروط من الشكل ($\leq$).

نحل كل معادلة إلى متراجحتين فيصبح النموذج بالشكل:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \longrightarrow Max$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

نحول المتراجحات من الشكل ($\geq$) إلى الشكل ($\leq$) بضربها بـ (-1) فيصبح النموذج:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \longrightarrow Max$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \quad y_1^+$$
$$-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \leq -b_1 \quad y_1^-$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2 \quad y_2^+$$
$$-a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \leq -b_2 \quad y_2^-$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Scanned by CamScanner

فيكون النموذج المرافق هو :

$$L = b_1 y_1^+ - b_1 y_1^- + b_2 y_2^+ - b_2 y_2^- \longrightarrow Min$$
$$a_{11}(y_1^+ - y_1^-) + a_{21}(y_2^+ - y_2^-) \geq c_1$$
$$a_{12}(y_1^+ - y_1^-) + a_{22}(y_2^+ - y_2^-) \geq c_2$$
$$a_{13}(y_1^+ - y_1^-) + a_{23}(y_2^+ - y_2^-) \geq c_3$$
$$y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \geq 0$$

---

2 أوجد البرنامج المرافق للبرنامج التالي :

$$L = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط :

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4$$
$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل: نلاحظ أن تابع الهدف هو تابع تقليل Min ، وبالتالي يجب أن تكون الشروط من الشكل ($\leq$)

نحول المتراجحة الأولى إلى الشكل ($\leq$) بضربها بـ (-1) فيصبح النموذج :

$$L = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \longrightarrow Min$$
$$-x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -4 \quad y_1$$
$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 2 \quad y_2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

وبالتالي فالنموذج المرافق هو :

$$Z = -4y_1 + 2y_2 \longrightarrow Max$$
$$-y_1 + y_2 \leq 3$$
$$-y_1 + 4y_2 \leq 2$$
$$-2y_1 + 3y_2 \leq 5$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

انتهت المحاضرة السادسة

Scanned by CamScanner