دكتورة المقرر : غصون الجيرودي
كتاب حول المقرر : طرائق العد للدكتور صلاح الأحمد وهو متوفر إلكترونياً على الموقع.

تُعتبرُ الرياضياتُ المتقطعة من الموادِ ذاتِ الارتباط الوثيق بكثيرٍ من المواد وتتعامل مع مجموعات متقطعة مثل $\mathbb{N}$ .. وتظهر في نظرية المجموعات والاحتمالات وبحوث العمليات .....

مثال عن المسائل التي تناقشها المادة: لو كان لدينا جملة معادلات وأردنا إيجاد حلول لها في الحقل $\mathbb{R}$ فإنَّ الأمر مختلف فيما لو أردنا إيجاد حلولها في الحلقة $\mathbb{Z}$

مثلاً: حل المعادلة $x + y = 2$ في $\mathbb{R}$ هي مجموعة نقاط المستقيم الذي معادلته $y = 2 - x$ أي لها في $\mathbb{R}$ عدد غير منتهٍ من الحلول أما في $\mathbb{N}$ فمجموعة حلولها هي $\{(0,2),(1,1),(2,0)\}$ وتعتبر هذه المسألة ضمن الرياضيات المتقطعة في $\mathbb{N}$ أما في $\mathbb{R}$ ليست ضمنها

وسنبدأ بالقسم الأول مرتبط بمبادئ العد:

تعريف (قدرة مجموعة منتهية): لتكن A مجموعة منتهية، نُعرف قدرة المجموعة A بأنها عدد عناصرها ويرمز لها بالرمز $Card\ A = |A|$. مثلاً لو كانت $A = \{2,4,6\}$ فإنَّ $|A| = 3$ وكما يمكن النظر إلى المجموعة A على أنها حالات ظهور وجه زوجي في تجربة رمي حجر نرد حيث يكون احتمال ذلك $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{الاحتمال} = \frac{\text{الحالات المواتية}}{\text{الحالات الكلية}}}$$

طرق العد: إنَّ طرق العد تؤول إلى إحدى المسائل التالية

1) مقارنة مجموعة بمجموعة عدتها (عدد عناصرها) منتهية.

2) حساب عدد عناصر مجموعة ناتجة عن اجتماع عدد من المجموعات.

3) حساب عدد عناصر الجداء الديكارتي لعدة مجموعات.

تعاريف وملاحظات ونتائج: لتكن A_1, A_2 مجموعات عندئذٍ:

1) $A_1 \subseteq A_2 \Leftrightarrow |A_1| \leq |A_2|$

2) $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ أي $|A_1 \cup A_2| \leq |A_1| + |A_2|$

3) $if\ A_1 \cap A_2 = \emptyset\ \ then\ \ |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$

أي عدد عناصر الاجتماع يكون مساوٍ لمجموع عدد عناصر المجموعتين إذا كانت المجموعات المأخوذ اجتماعها منفصلة (تقاطعها خالي).

ويمكن تعميم (3) على النحو التالي: إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعات منفصلة مثنى مثنى أي $A_i \cap A_j = \emptyset \;;\; i \neq j$ عندئذٍ

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

الجداء الديكارتي: لتكن المجموعتين A_1, A_2 بحيث $|A_1| = n \;,\; |A_2| = m$ نُعرف الجداء الديكارتي للمجموعتين A_1 و A_2 بأنه المجموعة

$$A_1 \times A_2 = \{(x_1, x_2) \;;\; x_1 \in A_1 \;,\; x_2 \in A_2\}$$

أي هي مجموعة المرتبات الثنائية التي مسقطها الأول من A_1 ومسقطها الثاني من A_2 ويكون

$$|A_1 \times A_2| = n \times m \quad , \quad |A_1 \times A_1| = n^2 \quad , \quad \underbrace{|A_1 \times A_1 \times \dots \times A_1|}_{r \text{ مرة}} = n^r$$

احتمالياً n^r هو إعادة ذات التجربة r مرة ففي تجربة إلقاء حجر نرد 3 مرات تكون الحالات الكلية هي $|A \times A \times A| = 6^3$

ويمكن تعريف الجداء الديكارتي لأكثر من مجموعتين بالشكل، إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعات عندئذٍ نُعرف الجداء الديكارتي لهذه المجموعات على أنه المجموعة

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \;;\; x_i \in A_i \;, i = 1, \dots, n\}$$

ملاحظة: إذا وُجد تقابل (تطبيق متباين وغامر) بين مجموعتين A, B كان $|A| = |B|$

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \exists\, f : A \xrightarrow{\text{تقابل}} B$$

أمثلة:

1) في تجربة إلقاء قطعة نقد ثلاث مرات متتالية يكون عدد الإمكانات هو $2 \times 2 \times 2 = 8$.

2) لنفرض أننا نريد تصنيف مجموعة من الأشخاص وفقاً لحالتهم المدنية (متزوج،عازب) ولجنسهم (ذكر،أنثى) ومهنهم (إذا كان هناك 20 مهنة) فيكون عدد الأصناف الممكنة هو

$$2 \times 2 \times 20 = 80$$

مثلاً (عازب، ذكر، نجار) تُمثل مرتبة من الجداء الديكارتي بثلاث مساقط.

3) ليكن a عدداً طبيعياً قواسمه الأولية هي $d_1, d_2, \dots, d_k$ بحيث $a = d_1^{m_1}.d_2^{m_2}\dots.d_k^{m_k}$ ما هو عدد قواسم a ؟ لنوضح ذلك من خلال مثال

$$a = 7560 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7$$

عدد القواسم يكون $64 = 2 \times 2 \times 4 \times 4$ وهو من أجل 2 يكون لدينا $\underbrace{2^0, 2^1, 2^2, 2^3}_{4}$ ومن أجل 5 يكون لدينا $\underbrace{5^0, 5^1}_{2}$ وبنفس الأسلوب لباقي الأعداد .. أخذنا من أجل الأس صفر لأنه مثلاً $2^0 \times 3^0 \times 5 \times 7$ يكون قاسم لـ a .

ومن خلال هذا المثال أصبح بإمكاننا أن نصوغ حل عام للمسألة المطروحة فيكون عدد قواسم a هو

$$(m_1 + 1) \times (m_2 + 1) \times \dots \times (m_k + 1)$$

مبدأ الجداء الديكارتي: لتكن A مجموعة غير خالية بحيث $|A| = n$ و $r \in \mathbb{N}^*$ كل عنصر $x_1, x_2, \dots, x_n$ من A^r عينة مرتبة حجمها r مأخوذ من المجموعة A ورأينا أنَّ عدد العينات يساوي $|A|^r = n^r$ ، ويمكن أن نميز حالتين:

1) أن نعيد العنصر إلى A بعد تسجيله ويكون لدينا عدد العينات المرتبة والتي حجمها r هو $|A|^r = n^r$

2) أن لا نعيد العنصر الذي أخذناه من A فيكون عددها، $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$

التبديلات: مجموعة العناصر السابقة بترتيب n شيئاً مختلفاً في r مكان ويرمز لها بـ

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \left(\text{بدون إعادة}\right)$$

مثال: بكم طريقة يمكن أن نسحب ثلاث أوراق على التتالي من مجموعة أوراق اللعب في حالتين:

1) مع إعادة: $52^3 = 140608$

2) بدون إعادة: $P_3^{52} = \frac{52!}{49!} = 52 \times 51 \times 50 = 132600$

التوافقات: إذا كان لدينا A مجموعة وأردنا مجموعة جزئية منها مجموع عناصرها r مأخوذاً من A

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(\mathrm{n}-\mathrm{r})! \cdot \mathrm{r}!} = \frac{P_r^n}{r!}$$

انتهت المحاضرة ،،، عامر أبوبكر