الأربعاء: 11/3/2015

المحاضرة الأولى:

تمهيد

- "حول مبدأ الاستقراء الرياضي" -

لا بدّ قبل البدء بموضوعات المقرر من عرض مبدأين هامين نستخدمهما في إثبات البرهنات ، الأول: مبدأ الترتيب الحسن أو (الجيد)
والثاني: مبدأ الاستقراء الرياضي المنتهي.

1- مبدأ الترتيب الحسن:

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة Z^+ فإنه يوجد في A عنصر أصغر
أي يوجد $a_0 \in A$ بحيث: $\forall a \in A \; ; \; a_0 \leqslant a$ «وهذا العنصر الأصغر وحيد»

2- مبدأ الاستقراء الرياضي:

لتكن P_n قضية رياضية ما ، ولنثبت صحة P_n من أجل $n \in \mathbb{N}$ أو ($n \geqslant 1$) (لأن بعض القضايا تبدأ من الواحد صحيح)
لإثبات ذلك:
1) خطوة البداية:
نثبت صحة P_n من أجل $n = 0$ ، [إذا كانت ($n \geqslant 1$) نثبت صحة P_n من أجل $1 = n$
2) خطوة الاستقراء:
نفرض صحة القضية P_n من أجل $n = k$

/ /

ونبرهن صحتها من أجل $n = k+1$

ملاحظة: (هناك صيغ أخرى لمبدأ الاستقراء مكافئة له منها):

① في خطوة البداية إذا كانت S_n محققة من أجل $n \geq n_0$

1) خطوة البداية: نثبت صحتها من أجل $n = n_0$

2) خطوة الاستقراء: نفرض صحتها من أجل $k \geq n_0$ ونبرهن صحتها من أجل $k+1$

مثال:

لتكن

$$S_n : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{مجموع من 1 إلى n}} \right)^2$$

أثبت صحة القضية S_n بالاستقراء الرياضي من أجل $n \geq 1$ ؟

الحل:

1) خطوة البداية: نثبت صحة S_n من أجل $n = 1$

$$1^3 = 1 \overset{?}{=} \left(\frac{1(2)}{(2)} \right)^2$$

$$1 = 1 \quad \text{محققة}$$

2) خطوة الاستقراء: نفرض صحة S_n من أجل $n = k$

$$S_k : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 \quad (*)$$

لنثبت صحتها من أجل $n = k+1$

$$S_{k+1} : \underbrace{1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3}_{f_1} \overset{?}{=} \underbrace{\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2}_{f_2}$$

من الفرض $(*)$:

$$f_1 = (1^3 + 2^3 + \cdots + k^3) + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2 (k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= (k+1)^2 \left[\frac{k^2}{4} + (k+1) \right]$$

$$= \frac{(k+1)^2 [k^2+4k+4]}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4} = \ell_2$$

إذا محققة من أجل $n = k+1$ بالتالي P_n محققة من أجل $n \geq 1$

ملاحظة:

② لإثبات صحة القضية P_n من أجل $n \geq n_0$

خطوة البداية: نثبت صحتها من أجل $n = n_0$

خطوة الاستقراء: نفرض صحة P_n من أجل كل n تحقق $k \leq n$ (إثبات من أجل k)

ـ نبرهن صحتها من أجل $n = k+1$

مثال:

لتكن المتتالية العددية الصحيحة المعرفة كما يلي:

$a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, , $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ $\forall n \geq 3$

أثبت أن $a_n \leq 3^n$ من أجل جميع قيم $n \in \mathbb{N}$

الحل:

1) خطوة البداية: نثبت صحة a_n من أجل $n = 3$

$$a_3 = a_2 + a_1 + a_0 = 3 + 2 + 1 = 6$$

$$a_3 = 6 \leq 3^3 = 27$$ محققة

$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + a_2 + a_1 = 6 + 3 + 2 = 11$

$$a_4 = 11 \leq 3^4 = 81$$ محققة

2) خطوة الاستقراء:

$a_{k-2} \leqslant 3^{k-2}$, $a_{k-1} \leqslant 3^{k-1}$

نفرض صحة العلاقة $a_k \leqslant 3^k$ أو $a_n \leqslant 3^n$ من أجل كل n تحقق:

$3 \leqslant n \leqslant k$

ولنبرهن صحتها من أجل $n = k+1$ أي لنبرهن أن:

$$a_{k+1} \leqslant 3^{k+1}$$

لدينا:

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} + a_{k-2}$$

$$\leqslant 3^k + 3^{k-1} + 3^{k-2}$$

$$\leqslant 3^k + 3^k + 3^k = 3.(3^k) = 3^{k+1}$$

تم المطلوب

أي أن العلاقة $a_n \leqslant 3^n$ صحيحة مهما تكن $n \in N$