المحاضرة الرابعة ..

.. 2015/3/23

مبرهنة (المؤثر العكسي):

ليكن X و Y فضاءين متجهيين كلاهما حقيقي أو عقدي، وليكن $T: D(T) \longrightarrow R(T)$ مؤثراً خطياً بحيث $D(T) \subset X$ ومداه $R(T) \subset Y$

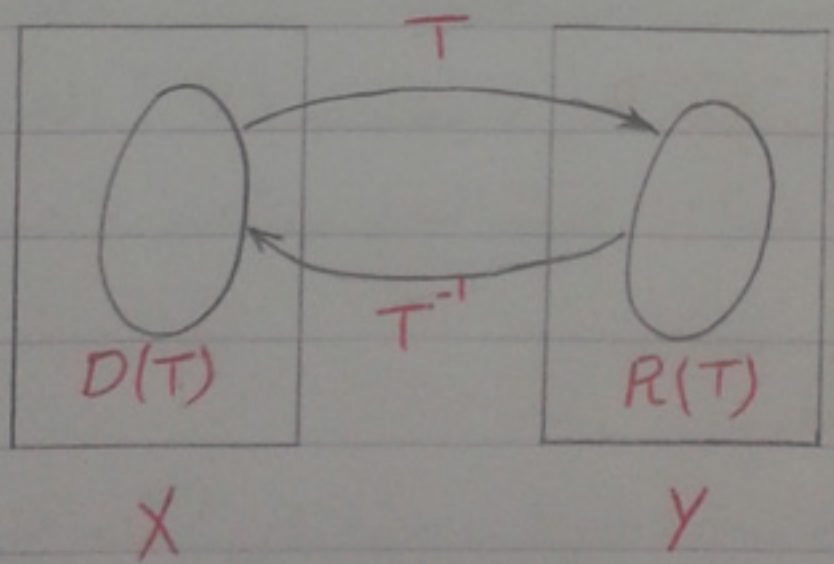
عندئذٍ نجد ما يلي:

P. الشرط اللازم والكافي كي يكون المؤثر العكسي $T^{-1}: R(T) \to D(T)$ موجود هو أن يكون $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$

ب. إذا كان T^{-1} موجود، فإنه مؤثر خطي.

جـ. إذا كان $\dim D(T) = n < \infty$، وكان T موجود فإن $\dim R(T) = \dim D(T)$.

البرهان:



P. موجود $T^{-1}: R(T) \to D(T) \Leftrightarrow Tx = 0 \Rightarrow x = 0$

(ننطلق من الشرط الموجود في الطرف الأيسر ونبرهن أنه صحيح وبالتالي يكون T^{-1} موجود)

$\Rightarrow$ لنفرض أنّ $Tx=0 \Leftarrow x=0$.

$$Tx_1 = Tx_2 \overset{?}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

$$T(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \text{ (حسب الفرض)}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

أي أنّ T متباين وبالتالي يكون T^{-1} موجود.

$\Leftarrow$ T^{-1} موجود ولدينا $Tx=0$ ولنبرهن أن $x=0$.

نعلم أنّ $T0 = 0$

وبما أنّ T متباين $\Leftarrow Tx = T0 = 0 \Rightarrow x = 0$.

$\Rightarrow$ لنفرض أنّ T^{-1} موجود ولنبرهن أنّه خطي.

بما أنّ T^{-1} مؤثر لأن منطلقه $R(T)$ فضاء متجهي ومستقره $D(T)$ فضاء متجهي

لنأخذ أي عنصرين x_1, x_2 من $D(T)$ وبالتالي تكون صورتيهما

$$y_1 = Tx_1 \quad , \quad y_2 = Tx_2$$

ويكون:

$$x_1 = T^{-1}y_1 \quad , \quad x_2 = T^{-1}y_2$$

يكون T^{-1} خطي إذا كان:

$$T^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 T^{-1}y_1 + \alpha_2 T^{-1}y_2$$

بما أنّ T خطي فإننا نجد أنه أيّاً كان العددان α_1, α_2 فإنّ:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 Tx_1 + \alpha_2 Tx_2 = T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

وبالتالي:

$$T^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 T^{-1}y_1 + \alpha_2 T^{-1}y_2$$

جـ- $\dim D(T) = n < \infty$ $\wedge$ T^{-1} موجود

لدينا حسب مبرهنة سابقة $\dim R(T) \leq \dim D(T)$

وبما أنّ T^{-1} موجود مؤثر خطي وبالتالي بتطبيق المبرهنة على T^{-1}

يكون $\dim D(T) \leq \dim R(T)$.

وبالتالي نجد أن $\dim D(T) = \dim R(T)$

تمرهيدية:

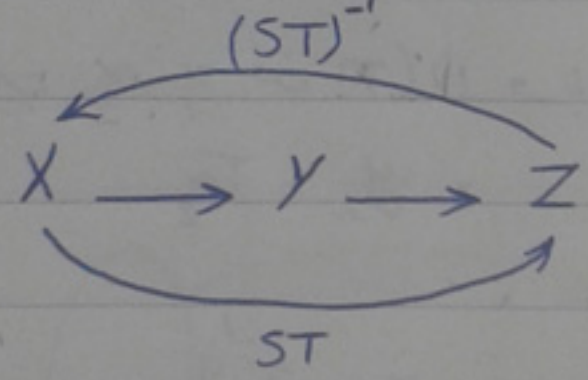
ليكن $T: X \to Y$ و $S: Y \to Z$ مؤثرين خطيين متباينين وغامرين

حيث X, Y, Z فضاءات متجهية، عندئذٍ يكون العكس $(ST)^{-1}: Z \to X$

للجداء ST (أي للمركب ST) موجوداً ويكون:

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

البرهان:



$$ST: X \to Z$$

بما أنّ ST متباين وغامر فإنّ $(ST)^{-1}$ موجود.

وبالتالي:

$$ST(ST)^{-1} = I_Z$$

مطلعة التطبيق المحايد

ST ثم $(ST)^{-1}$ تطبيقاً أو مؤثراً

$Z \to X \to Y$

حيث I_Z هو المؤثر المطابق على Z.

وبما أنَّ $S^{-1}S = I_y$ فإننا نجد أنَّ:

$$S^{-1}S\,T(ST)^{-1} = T(ST)^{-1} = S^{-1}I_Z = S^{-1}$$

وبما أن $T^{-1}T = I_x$ فإننا نجد أنَّ:

$$T^{-1}T(ST)^{-1} = (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

وهو المطلوب.

وانتهت المحاضرة