Subject: المحاضرة الرابعة 2013 / 3 / 12

نظرية العزم الحركي

لتكن M نقطة مادية كتلتها m وسرعتها v ولتكن لدينا نقطة ثابتة O
عندئذ بأن عزم كمية الحركة ($\vec{p} = m\vec{v}$) هو بالتعريف العزم الحركي للنقطة M حول النقطة (O)
وبالتالي: (σ رمز العزم الحركي).

$$\boxed{\vec{\sigma} = \vec{OM} \wedge \vec{p}}$$

حتى نوجد نظرية العزم الحركي نشتق بالنسبة للزمن:

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{OM} \wedge \vec{p})$$

$$= \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge \vec{p}\right) + \left(\vec{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

بان p كمية الحركة و $\frac{d\vec{OM}}{dt}$ (مشتق شعاع الموضع السرعة v) شعاعين على نفس الحامل وبالتالي خارجيا يكونا صفر ومنه:

$$= 0 + \left(\vec{OM} + \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = OM \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

وبما أن $\vec{p} = m\vec{v}$ ومنه:

$$= \vec{OM} \wedge \frac{d\,m\vec{v}}{dt}$$

وبالتالي: $= OM \wedge m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$ (مشتق السرعة بالنسبة للزمن هو التسارع)

$$= \vec{O}M \wedge m\vec{\gamma}$$

$$= OM \wedge \vec{F}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

Subject: 2C / /

أي المشتق بالنسبة للزمن للعزم الحركي لنقطة مادية M حول O هو عزم القوى المؤثرة حول O.

من خطة هامة:

ان $\vec{OM} \wedge \vec{F} = 0$ هذه العلاقة لا تتحقق إلا إذا كان $\vec{F} = 0$ (حيث $\vec{F}$ القوة المؤثرة على النقطة المادية.

أو: ان خط تأثير القوة F يمر من نقطة ثابتة (O) عندئذ نسمي القوة $\vec{F}$ مركزية $(\vec{OM} \parallel \vec{F})$

(متوازيين فهما بشكل خارجي يساويان الصفر)

وبالتالي فإن المشتق بالنسبة للزمن

$$\frac{d}{dt}(\vec{OM} \wedge m\vec{v}) = 0$$

$$(*) \Rightarrow \vec{OM} \wedge m\vec{v} = const$$ [قانون مصونية العزم الحركي

وبالتالي إذا كانت النقطة المادية خاضعة لقوة مركزية أو لمجموعة من القوى محصلتها مركزية يكون لدينا $\vec{OM} \wedge m\vec{v} = const$ وهذه العلاقة تعني أنه إذا خضعت النقطة المادية لقوة مركزية فإن عزمها الحركي يكون مقدار ثابت ولا يتغير مع مرور الزمن.

من $(*)$ ثابت ولكن $\vec{OM}$ شعاع موضع ويمكننا أن نكتب هذا بصيغة تبين أن عزم السرعة نقطة مادية لقوة مركزية يكون مقدار ثابت.

$\vec{v} = 0$ مرفوضة لكون M تنطبق على O.

نظرية الطاقة الحركية

باستخدام قانون التحريك الأساسي

$$m\vec{\Gamma} = \vec{F} \Rightarrow (1)$$

نضرب طرفي هذه العلاقة عدديا بـ $d\vec{OM}$

$$\Rightarrow m\vec{\Gamma} \cdot d\vec{OM} = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

Subject:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{OM}=\vec{F}\cdot d\vec{OM}$$

$$m\,d\vec{v}\cdot\frac{d\vec{OM}}{dt}=\vec{F}\cdot d\vec{OM}$$

(السرعة)

$$m\cdot dv\cdot v=\vec{F}\,d\vec{OM}$$

$$m\cdot v\cdot dv=\vec{F}\,d\vec{OM}$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\vec{F}\cdot d\vec{OM}$$

ندعو المقدار $\frac{mv^2}{2}$ بالطاقة الحركية ونرمز لها T

$$\boxed{T=\frac{mv^2}{2}}$$

أصبح لدينا $dT=\underbrace{F\cdot dM}_{\text{عمل جزئي}}$

نص النظرية هو

تفاضل الطاقة الحركية لنقطة مادية يساوي إلى العمل الجزئي للقوة المؤثرة على هذه النقطة، وبالتالي إذا عالجنا انتقالاً محدوداً للنقطة المادية من الموضع M_0 حيث كانت السرعة v_0 إلى الموضع M حيث أصبحت السرعة v وبالتالي بالمكاملة:

$$T-T_0=\int_{M_0}^{M}F\cdot dM$$

$$\Rightarrow T-T_0=A$$

- تكامل الطاقة:

نفرض أن القوة المؤثرة على النقطة المادية هي قوة كمونية

$$F\cdot dr=du$$

ندخل تابع جديد $u=-v$ ندعوه الطاقة الكامنة لنقطة المادية

مهم لكل المسائل

$$\Rightarrow dT=-dv \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} T+v=h$$

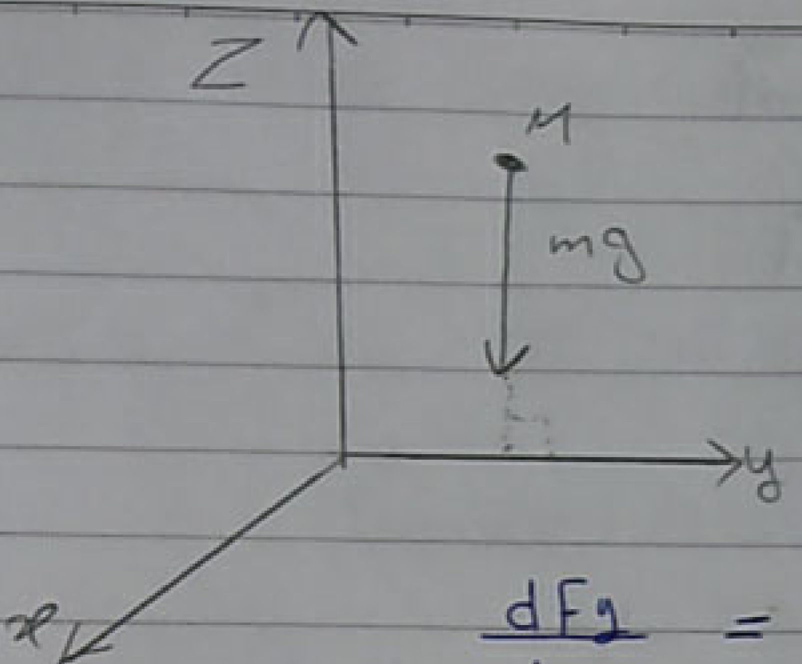
حيث h هو ثابت

* مثال: بيّن أن القوة الثقالية هي كمونية:

$P=mg$ لنأخذ جملة محاور أساسية بحيث Z محور شاقولي صاعد

باستخدام قانون الأساسي للتحريك:

$$m\vec{\Gamma}=\vec{F}$$



$$m x'' = F_x = 0$$
$$m y'' = F_y = 0$$
$$m z'' = F - mg$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow 0 = 0$$

$$\frac{dF_y}{dz} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \Rightarrow 0 = 0$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \Rightarrow 0 = 0$$

اذاً القوة كمونية:

$$\mathrm{rot}\ \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sim & \sim & \sim \\ \sim & \sim & \sim \end{vmatrix} = 0$$

أو باستخدام

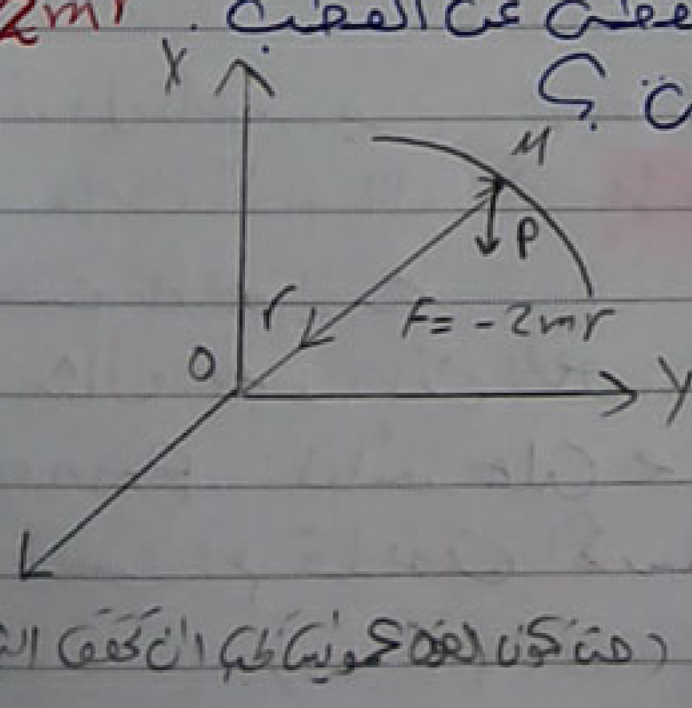
التابع الكموني يساوي صفر لأن شعاع القوة عامودي على الانتقال

تابع كموني $U = 0$

مثال:

نقطة مادية كتلتها m تتحرك على منحني ومجذوبة من نقطة ثابتة O

بقوة متناسبة مع بعد هذه النقطة عن القطب . $F = -2mr$



ما هي القوة المؤثرة على هذه النقطة ؟

هنا يوجد قوتين قوة الثقالة $\vec{P}$ والقوة $\vec{F}$

من قانون التحريك الأساسي .

$$m\vec{\gamma} = \vec{F}$$
$$m x'' = F_x = -2mx$$
$$m y'' = F_y = -2my$$
$$m z'' = F_z = 0$$

(متى تكون القوة كمونية طبعاً ان تحقق الشروط)

Subject: SC / /

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow 0 = 0$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \Rightarrow 0 = 0$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \Rightarrow 0 = 0$$

اذاً القوة كمونية.
مجموع قوتين كمونيتين هو قوة كمونية.
لإيجاد تابع كموني من التعريف:

$$du = F \cdot dr \Rightarrow u = \int F \cdot dr = \int -2mr \cdot dr$$

$$\Rightarrow \boxed{V = -mr^2}$$

مثال:
M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المحور ox وتخضع لقوة جاذبة متناسبة عكساً مع مكعب البعد أي:

$$F = -m\frac{k^2}{x^3}$$

المطلوب:
1) كتابة المعادلة التفاضلية للحركة وحل هذه المعادلة ضمن شروط البدء: في لحظة البدء تركت النقطة بدون سرعة ابتدائية في الموضع a.
2) ما هو الزمن اللازم لوصول هذه النقطة الى الموضع o؟

الحل: حسب قانون نيوتن الثاني:

$$m\vec{\Gamma} = \vec{F}$$

بالإسقاط:

$$mx'' = -m\frac{k^2}{x^3}$$

نقسم على الكتلة m

$$x'' = -\frac{k^2}{x^3}$$

(معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية)

Subject: 6c

/ /

نضرب الطرفين بـ $2x'$:

$$2x'x'' = -\frac{2x'k^2}{x^3}$$

$$x'^2 = \frac{k^2}{x^2} + c_1 \quad (*)$$

نعين c_1 من شروط البدء: $t=0 \quad x=a \quad x'=0$ (السرعة)

بالتعويض:

$$0 = \frac{k^2}{a^2} + c_1 \Rightarrow c_1 = -\frac{k^2}{a^2}$$

ومن $(*)$ تكون:

$$x'^2 = \frac{k^2}{x^2} - \frac{k^2}{a^2}$$

بتوحيد المقامات نجد:

$$x'^2 = \frac{k^2(a^2-x^2)}{x^2a^2}$$

بجذر الطرفين:

$$x' = \mp \frac{k}{ax}\sqrt{a^2-x^2}$$

نأخذ الإشارة السالبة لأن القوة جاذبة.

$$x' = -\frac{k}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

لحلها نكامل:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{xa}\sqrt{a^2-x^2}$$

معادلة تفاضلية قابلة للفصل

$$-\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{k}{a}dt \quad **$$

$$\Rightarrow +\sqrt{a^2-x^2} = \frac{k}{a}t + c_2$$

ولحساب c_2 من شروط البدء $t=0 \quad x=a$

$$\Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2-x^2} = \frac{k}{a}t$$

نربع:

$$a^2 - x^2 = \frac{k^2}{a^2}t^2$$