المحاضرة السابعة   30/3/2015

التمثيلات الخزولة والخزولة تماماً :

تعاريف :

1. ليكن $T: G \to GL(V)$ تمثيلاً للزمرة G على فضاء $V(F)$ وليكن W فضاء جزئي من V
نقول عن W انه G - فضاء جزئي من V اذا تحقق :

$$T_g(W) \subseteq W \quad \forall g \in G$$

بعبارة مكافئة : $\forall w \in W \;.\; \forall g \in G : T_g(w) \in W$

امثلة :

* اذا كان $T: G \to GL(V)$ تمثيلا للزمرة G على الفضاء V فان كلا من V و 0 هو G - فضاء جزئي من V .
* لتكن $G = S_3$ و V فضاء شعاعي بحيث $\dim V = 3$ قاعدته $S = (v_i)_{i=1,2,3}$
ولنأخذ التمثيل $T: G \to GL(V)$ حيث $T_g : V \to V$

$$g \mapsto T_g \qquad T_g(v_i) = v_{g(i)}$$

لنأخذ الحالات :

* ليكن $W = \langle v_1 + v_2 + v_3 \rangle$ فضاء شعاعي جزئي من V بعده واحد أثبت أن W هو G - فضاء جزئي من V .
* ليكن $U = \langle u_1 = v_1 - v_3 , u_2 = v_2 - v_3 \rangle$ فضاء شعاعي جزئي من V مولد بشعاعين أثبت أن U هو G - فضاء جزئي من V
* هل الفضاء الجزئي $E = \langle e_1 = v_1 + v_3 , e_2 = v_2 + v_3 \rangle$ هو G - فضاء جزئي من V ولماذا ؟؟ .

الحل :

* الحالة الاولى : إن $w = v_1 + v_2 + v_3$ هو اساس (قاعدة) في W لانه مؤلف من شعاع واحد غير صفري . وبالتالي :

$$\forall g \in G : T_g(w) = T_g(v_1 + v_2 + v_3) \underset{\downarrow}{=} T_g(v_1) + T_g(v_2) + T_g(v_3)$$

T_g مؤثر خطي .

ان T_g تتعين فقط من اجل T_a و T_b لذلك كل التمثيلات الخطية للزمرة S_3 التي عددها 6 يتم تعيينها بـ T_a و T_b فقط ((لأن a و b تولد الزمرة S_3)) .

$$= v_{g(1)} + v_{g(2)} + v_{g(3)} \Rightarrow$$

هذه المجموعة ← تحوي نفس جميع العناصر بغض النظر عن الترتيب

$$g \in S_3 : \{g(1), g(2), g(3)\} = \{1, 2, 3\}$$

$\Rightarrow T_g(w) = v_1 + v_2 + v_3 \in W \Rightarrow$ W هو G - فضاء .

مستقلان خطياً وبالتالي اي تركيب خطي بينهما يكون مستقل .

* ان $S=(u_1,u_2)$ اساس للفضاء U

فبان اي مؤثر خطي $\forall g\in G$: T_g يكتب بدلالة T_b and T_a

حيث $a=(1\ 2\ 3)$, $b=(1\ 2)$

ومنه يكفي لاثبات ان U هو G - فضاء ان نثبت ان

$T_a(u_1)$ and $T_a(u_2)$ $\in U$

$T_b(u_1)$ and $T_b(u_2)$ $\in U$

$$\Longrightarrow T_a(u_1)=T_a(v_1-v_3)=T_a(v_1)-T_a(v_3)=v_{a(1)}-v_{a(3)}$$
$$=v_2-v_1=-u_1+u_2\in U$$
$$T_a(u_2)=T_a(v_2-v_3)=T_a(v_2)-T_a(v_3)=v_{a(2)}-v_{a(3)}$$
$$=v_3-v_1=-u_1\in U$$
$$T_b(u_1)=T_b(v_1-v_3)=T_b(v_1)-T_b(v_3)=v_{b(1)}-v_{b(3)}$$
$$=v_2-v_3=u_2\in U$$
$$T_b(u_2)=T_b(v_2-v_3)=T_b(v_2)-T_b(v_3)=v_{b(2)}-v_{b(3)}$$
$$=v_1-v_3=u_1\in U$$

وبالتالي U هو G فضاء جزئي من V .

* انا نتبع اسلوب مشابه للمتبع سابقاً كما يلي :

$$T_a(e_1)=T_a(v_1+v_3)=T_a(v_1)+T_a(v_3)=v_{a(1)}+v_{a(3)}=v_2+v_1$$

لنرى فيما اذا كان v_2+v_1 ينتمي لـ E : لنبحث عن $\beta,\alpha\in F$ حيث :

$$v_2+v_1=\alpha e_1+\beta e_2$$
$$v_1+v_2=\alpha(v_1+v_3)+\beta(v_2+v_3)=\alpha v_1+\alpha v_3+\beta v_2+\beta v_3$$
$$\Longrightarrow (1-\alpha)v_1+(1-\beta)v_2+(-\alpha-\beta)v_3)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}1-\alpha=0\\1-\beta=0\\-\alpha-\beta=0\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}\alpha=1\\\beta=1\\-1-1\neq 0\end{array}\right]$$

جملة معادلات خطية مستحيلة الحل .

اي ان $v_2+v_1\notin E$ وبالتالي E ليس G - فضاء جزئي من V .

تمرين :

إذا كان $T : G \longrightarrow GL(V)$ تمثل لزمرة G على فضاء V ، وليكن U, W فضائين شعاعيين جزئيين من V ، وهما G - فضاء جزئي من V .

عندئذ أثبت أن • $W \cap V$ هو G - فضاء جزئي من V .

• $W + V$ G - فضاء جزئي من V .

الحل :

* $W \cap V$: لنبرهن أن $T_g(v) \in W \cap U$: $v \in W \cap U$

$v \in W \cap U$, $\forall g \in G \Longrightarrow v \in W$, $v \in U$

حسب الفرض $T_g(v) \in W$ and $T_g(v) \in U \Longrightarrow T_g(v) \in W \cap V$

وبالتالي $W \cap V$ هو G-فضاء جزئي من V .

* $W + U$: إذا كان $g \in G$ وإذا كان $v \in W + U$ فإن v يكتب بالشكل :

$v = w + u$; $w \in W$ and $u \in U$

عندئذ يكون :

$$T_g(v) = T_g(w + u) = \underbrace{T_g(w)}_{\in W} + \underbrace{T_g(u)}_{\in U} \in W + U$$

وبالتالي : $W + U$ هو G-فضاء جزئي من V .

Finished Lecture...

• الزمرة البسيطة هي الزمرة التي لا تحتوي زمرة جزئية ناظمية فعلية .

• هل تعتمد صفة الزمرة على التمثيل الخاص بها (إذا كانت الزمرة تامة الحل أو عمومية الحلول ——) .