الأربعاء: 25/3/2015

المحاضرة الثالثة:

تتمة برهان مبرهنة الوجود والوحدانية للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى:

الخطوة الثانية:

سوف نبرهن صحة العلاقة:

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant \frac{M.k^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n \qquad (5)$$

تم إثبات هذه العلاقة في الخطوة الأولى عندما $n=1$

$$\text{if } n=1 \Rightarrow |y_1 - y_0| \leqslant M|x - x_0|$$

البرهان يتم باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي:

لنفرض أن المتراجحة (5) محققة من أجل القيمة $n-1$ بدلاً من n أي أن:

$$|y_{n-1} - y_{n-2}| \leqslant \frac{M.k^{n-2}}{(n-1)!}|x - x_0|^{n-1} \qquad (6)$$

عندئذٍ نشكل الفرق (اعتماداً على (4))

$$|y_n - y_{n-1}| = \left|\int_{x_0}^{x}[f(s, y_{n-1}) - f(s, y_{n-2})]\,ds\right|$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x}|f(s, y_{n-1}) - f(s, y_{n-2})|.|ds| \qquad (7)$$

لكن حسب (2) شرط ليبشتز:

$$|f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2})| \leqslant k|y_{n-1} - y_{n-2}| \qquad (8)$$

مستفيدين من (7) و (8)

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant \int_{x_0}^{x} k\,|y_{n-1} - y_{n-2}| \cdot |ds|$$

$$\int_{x_0}^{x} |x-x_0|^{n-1}\,|ds| = \frac{|x-x_0|^n}{n}$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x} \frac{k\,M.k^{n-2}}{(n-1)!}\,|x-x_0|^{n-1}\,|ds| = \frac{M\,k^{n-1}}{n(n-1)!}\,|x-x_0|^{n} \;,\quad n(n-1)! = n!$$

وذلك باستخدام المتراجحة (6) وهذا يعني بدوره أنّ المتراجحة (5) محققة من أجل أي قيمة لـ n.

الخطوة الثالثة:

سوف نثبت أنّ المتتالية $\{y_n\}_{n\geqslant 1}$ تتقارب بانتظام إلى نهاية محدودة لكل

$$|x-x_0| \leqslant h$$

$$x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$$

حسب الخطوة الثانية:

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant \frac{M.k^{n-1}h^n}{n!}$$

وذلك من أجل كل قيم n حيث $|x-x_0| \leqslant h$ هذا من جهة

ومن جهة ثانية لنشكل المتسلسلة اللانهائية التالية:

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) + \cdots$$

$$\leqslant y_0 + M.h + \frac{1}{2!}M.kh^2 + \cdots + \frac{1}{n!}M.k^{n-1}.h^n$$

$$\leqslant y_0 + \frac{M}{k}\left[e^{kh} - 1\right] \qquad (9)$$

وهي متقاربة لكل قيم M, k, h ومن ثمّ تكون المتسلسلة (9) متقاربة بانتظام على الفترة المغلقة $[x_0 - h, x_0 + h]$ وذلك لأن الحدود الموجودة في (9) تشكل

دوال مستمرة بالنسبة لـ x ويكون:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$$

والذي يجب أن يكون تابعاً مستمراً كذلك.
والذي يشكل حلاً للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى:

$$y' = f(x, y)$$

المقرونة بالشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$

وهذا يدعونا إلى اثبات الخطوة الرابعة القادمة.

الخطوة الرابعة:

$y(x)$ حل يحقق المعادلة المقرونة بالشرط الابتدائي

$y_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{بانتظام}} y(x)$ على الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$

باستخدام شرط ليبشتز:

$$|f(x,y) - f(x,y_0)| \leqslant k|y - y_0|$$

بما أن $y_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{بانتظام}} y(x)$

$$\Rightarrow f(x, y_n(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{بانتظام}} f(x, y(x))$$

من (4)

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1})\, ds$$

نأخذ نهاية الطرفين:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1})\, ds$$

وبما أن المتتالية $\{f(x, y_n(x))\}_{n\geqslant 1}$ والتي تتكون من دوال مستمرة على الفترة المعطاة

تتقارب بانتظام إلى $f(x, y(x))$ عندئذ يكون:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n \to +\infty} f(s, y_{n-1}(s))\, ds$$

أو

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$$

والدالة المكاملة في الطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة تمثل دالة مستمرة في x ومن ثم في هذه الحالة فإن التكامل الموجود له دالة مشتقة وعلى ذلك فإن نهاية الدالة $y_n(x)$ تحقق المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ والمقرونة بالشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$ وذلك على الفترة المغلقة $[x_0 - h, x_0 + h]$

نستنتج مما سبق أن الخطوات الأربعة السابقة تثبت وجود حل لمسألة القيم الابتدائية المفروضة . ولإثبات الحل الوحيد ننطلق إلى الخطوة الخامسة .

الخطوة الخامسة:

سوف نثبت أن الحل $y = y(x)$ هو الحل الوحيد لمسألة القيم الابتدائية المفروضة نفرض وجود حلاً آخر مثل $Y(x)$ لمسألة القيم الابتدائية المفروضة وبحيث يكون:

$$|Y(x) - y(x)| \leqslant B\,|x - x_0| \leqslant h \qquad (1)'$$

نشكل الفرق:

$$|Y(x) - y(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(s, Y(s)) - f(s, y(s))]\, ds \right|$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(s, Y(s)) - f(s, y(s))| . |ds|$$

بالاستفادة من شرط ليبشتز:

$$\leqslant k \int_{x_0}^{x} |Y(s) - y(s)| . |ds| \qquad (*)$$

بالاستفادة من المتراجحة $(1)'$

$$\leq k\, B\, |x - x_0| \quad (**)$$

من المتراجحتين الأخيرتين (*) و (**)

$$|Y(x) - y(x)| \leq k^2 B \int_{x_0}^{x} |x - x_0|\, dx$$

$$\leq k^2 . B \frac{|x - x_0|^2}{2!} \quad (***)$$

بالتعويض مرة أخرى من (***) في دالة المكاملة الموجودة في (*)
نحصل على:

$$|Y(x) - y(x)| \leq \frac{k^3 . B}{2!} \int_{x_0}^{x} |x - x_0|^2\, ds$$

$$\leq k^3 . B \frac{|x - x_0|^3}{3!}$$

وبتكرار هذه العملية نحصل على:

$$|Y(x) - y(x)| \leq k^n . B \frac{|x - x_0|^n}{n!}$$

$$\leq \frac{[Kh]^n . B}{n!} \quad ; \quad |x - x_0| \leq h$$

وبما أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} B . \frac{(kh)^n}{n!}$ متقاربة ، فعندئذٍ يكون:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{[k.h]^n}{n!} . B = 0$$

وذلك لجعل المقدار الموجود في الطرف الأيسر أصغر من أي عدد مهما كان صغيراً مثل ε
وهذا يعني بدوره حسب تعريف النهاية:

$$Y(x) - y(x) = 0 \Rightarrow Y(x) = y(x)$$

وهذا يبين بدوره أن الدالة $y(x) = Y(x)$ تشكل دائماً حلاً وحيداً لمسألة القيم الابتدائية المطروحة. وبهذا الشكل نكون قد أثبتنا في الخطوة الخامسة على وحدانية الحل وهو المطلوب.

ملاحظة هامة:

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ تحقق الشرط

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant k$$

وذلك من أجل جميع قيم (x,y) المعطاة في منطقة كيفية عندئذ فإن شرط ليبشتز يتحقق من أجل نفس الثابت k، ولإثبات ذلك نعتمد على مبرهنة القيمة الوسطى كما يلي:

$$f(x,y_2)-f(x,y_1)=(y_2-y_1)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=\bar{y}} \quad ; \; y_1<\bar{y}<y_2$$

(x,y_2) ، (x,y_1) نقطتان تقعان في المنطقة المفروضة المعطاة

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|=\left|(y_2-y_1)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|=|y_2-y_1|\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leqslant k|y_2-y_1|$$

وهذا الشرط الأخير هو شرط ليبشتز بذاته وهذا يعني مما سبق أنه يمكن استبدال شرط ليبشتز الأخير بالشرط الأقوى لليبشتز:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant k$$

مبرهنة:

لتكن S هو إما المستطيل $|x-x_0|\leqslant h$ ، $|y-y_0|\leqslant k$

أو الشريط:

$$|x-x_0|\leqslant h \quad , \quad |y|<\infty$$

$f(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على S بحيث يكون $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجود ومستمر على S

والأكثر من ذلك:

إذا كان $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant k$ ، $(x,y) \in S$ فإن الدالة $f(x,y)$ تحقق شرط ليبشتز على S بثابت ليبشتز k

البرهان:

نشكل الفرق:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left|\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot dy\right| \quad ; \quad \forall (x,y_1), (x,y_2) \in S$$

$$\leqslant \int_{y_1}^{y_2} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot |dy| \leqslant k \int_{y_1}^{y_2} |dy|$$

$$\Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant k|y_1 - y_2| \quad ; \quad \forall (x,y_1), (x,y_2) \in S$$

والأخيرة ما هي إلا شرط ليبشتز والثابت k ثابت ليبشتز.

مثال:

أثبت أن الدالة $f(x,y) = xy^2$ تحقق شرط ليبشتز على المستطيل

$S \quad |y| \leqslant 1 \quad , \quad |x| \leqslant 1$

ولكنها لا تحقق شرط ليبشتز على الشريحة (الشريط):

$|y| < \infty \quad , \quad |x| \leqslant 1$

الحل:

$\forall (x,y_1), (x,y_2) \in S$

لنشكل الفرق:

$$f(x,y_1) = xy_1^2 \quad , \quad f(x,y_2) = xy_2^2$$

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = xy_1^2 - xy_2^2 = x(y_1^2 - y_2^2)$$

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = |x|\cdot|y_1+y_2|\cdot|y_1-y_2|$$

$$\leqslant 1\cdot 2\,|y_1-y_2|$$

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leqslant 2\cdot|y_1-y_2| \quad ; \quad \boxed{k=2}$$

وهذا يعني أن شرط ليبشتز يتحقق لثابت مقداره 2

لنثبت أن شرط ليبشتز غير محقق على الشريحة :

$$|f(x,y_2)-f(x,0)| = |x\cdot y_2^2 - 0| \longrightarrow +\infty \quad ; |x| \neq 0$$

عندما $|y_2| \to \infty$

وهذا يعني بدوره أن شرط ليبشتز غير محقق على الشريحة المفروضة حسب نص السؤال.

مثال آخر:

ليكن S هو المستطيل $|x| \leqslant a$ & $|y| \leqslant b$

أثبت أن الدالة

$f(x,y) = x^2+y^2$ تحقق شرط ليبشتز ثم أوجد ثابت ليبشتز

الحل:

حسب الخطوات المعتمدة في المثال السابق

$$\forall (x,y_1),\ (x,y_2) \in S$$

$$f(x,y_1) = x^2+y_1^2 \quad \& \quad f(x,y_2) = x^2+y_2^2$$

$$f(x,y_2)-f(x,y_1) = x^2+y_2^2-x^2-y_1^2 = y_2^2-y_1^2$$

$$= (y_2-y_1)(y_2+y_1)$$

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)| = |(y_2-y_1)(y_2+y_1)|$$

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)| \leqslant 2b\,|y_2-y_1|$$

وهذا يعني أن شرط ليبشتز قد تحقق بثابت مقداره $2b$ وهو المطلوب.

مثال آخر:
أعط مثالاً تبين فيه أن الدالة المستمرة يمكن أن لا تحقق شرط ليبشتز على مستطيل ما
الحل:
ليكن لدينا المستطيل S

$$S: \quad |x| \leqslant 1 \qquad |y| \leqslant 1$$

نلاحظ أن هذه الدالة:

$$f(x,y) = y^{2/3}$$

وهي دالة مستمرة على الشريط S

$$\text{but}: \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|\frac{2}{3y^{1/3}}\right| \xrightarrow[y \to 0]{} \infty$$

ولأن $y = 0$ نقطة في S مما سبق نستنتج أن شرط ليبشتز غير محقق بالدالة الاختيارية الموجودة أعلاه.

مثال آخر:
لتكن لدينا مسألة القيم الابتدائية التالية

$$y' = f(x,y) = e^{y} \qquad ; \quad y(0) = 0$$

أوجد أكبر فترة $|x| \leqslant a$ التي يكون من أجلها المسألة المفروضة ملائماً
(وظيفة)

يتم البرهان بالاستناد إلى مبرهنة القيم الوسطى.

مسألة:
أثبت أن في مسألة القيم الابتدائية

$$y' = f(x,y) = y \qquad , \qquad y(0) = 1$$

يجب أن يكون الثابت a في مبرهنة الوجود والوحدانية أقل من 1 (وظيفة)

مثال:

برهن أن لمسألة القيم الابتدائية التالية:

$$y' = f(x,y) = x^2 + y^2 \quad ; \quad y(0) = 0$$

حلاً وحيداً استناداً إلى مبرهنة الوجود والوحدانية السابقة ثم أوجد التقريب الثاني للمسألة المطروحة.

تعريف شرط ليبشتز الشمولي:

لتكن $g(x)$ دالة كيفية نقول عن هذه الدالة إنها تحقق شرط ليبشتز على جزء من الفضاء أو على الفضاء كله إذا حققت الشرط التالي:

$$\| g(x') - g(x'') \| \leqslant k \; \| x' - x'' \|$$

ويسمى هذا الشرط بشرط ليبشتز الشمولي

لأننا لم نتقيد في اختيار x', x'' ولكن يشترط أن تنتمي x', x'' إلى هذا الفضاء أو إلى جزء منه.

تعريف شرط ليبشتز الموضعي:

نقول عن الدالة $g(x,y)$ في المنطقة D حيث $D \subseteq \mathbb{R}^2$ إنها تحقق شرط ليبشتز الموضعي بخصوص y إذا وجد لكل موضع $(x_0, y_0) \in D$ جوار

$k = k(x_0, y_0)$ وثابتة $U = U(x_0, y_0)$

بحيث تحقق g شرط ليبشتز التالي:

$$| g(x,y) - g(x,\bar{y}) | \leqslant k \, | y - \bar{y} |$$

$$\forall (x,y), (x,\bar{y}) \in D \cap U$$

انتهت المحاضرة....