نمذجة رياضية

المحاضرة الخامسة

ص.10/3/ص9

الحالة الثانية: (نموذج مفتوح - غير متوازن)

أولاً: فائض في الإنتاج:

في هذه الحالة يكون: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

في هذه الحالة نضيف مركزاً استهلاكياً وهمياً حاجته:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

بحيث تكون تكلفة النقل من جميع المراكز الإنتاجية إلى هذا المركز الاستهلاكي تساوي الصفر، أي: $c_{i\,n+1} = 0 \quad ; \quad i = \overline{1,m}$

عندئذٍ يصبح النموذج الرياضي: أوجد القيمة الصغرى للتابع:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}\, x_{ij} \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط:

$$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1\,n+1} = a_1$$
$$\vdots$$
$$x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{m\,n+1} = a_m$$
$$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1$$
$$\vdots$$
$$x_{1\,n+1} + x_{2\,n+1} + \cdots + x_{m\,n+1} = b_{n+1}$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i = \overline{1,m} \quad , \quad j = \overline{1,n+1}$$

Scanned by CamScanner

ثانياً: عجز في الإنتاج:

في هذه الحالة يكون: $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

هنا نضيف مركزاً إنتاجياً وهمياً طاقته الإنتاجية:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

بحيث تكون تكلفة النقل من هذا المركز الإنتاجي إلى جميع المراكز الاستهلاكية تساوي الصفر، أي:

$$C_{m+1\ j} = 0 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

عندئذٍ يصبح النموذج الرياضي على الشكل التالي:

أوجد القيمة الصغرى للتابع:

$$L = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij} \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط:

$$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1$$
$$x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2$$
$$\vdots$$
$$x_{m+1\,1} + x_{m+1\,2} + \cdots + x_{m+1\,n} = a_{m+1}$$

يجب كتابة الشروط بهذا التفصيل في الفحص

$$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m+1\,1} = b_1$$
$$x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m+1\,2} = b_2$$
$$\vdots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{m+1\,n} = b_n$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i = \overline{1,m+1} \quad , \quad j = \overline{1,n}$$

Scanned by CamScanner

٢ نموذج نقل المواد بأقصر فترة زمنية:

يختلف هذا النموذج عن النماذج السابقة بأنه يهدف إلى نقل كامل الكمية من مراكز الإنتاج أو التوزيع إلى مراكز الاستهلاك بأقصر فترة زمنية ممكنة.
ونصادف مثل هذه المسائل عند وضع خطط نقل المواد سريعة العطب كالحليب والأدوية والأغذية ---.
كذلك عند وضع خطط لتأمين الذخائر القتالية في حالة الحرب حيث يكون الهدف هو النقل بأسرع ما يمكن وبأقل كلفة ممكنة.

صياغة المسألة:

لنفترض أنه لدينا m مركزاً لتصدير مادة ما.
وأن طاقات تلك المراكز محددة بالكميات التالية: $a_1, a_2, ----, a_m$
وأنه لدينا n مركزاً استهلاكياً، وأن متطلباتها محدودة من تلك المادة بالكميات: $b_1, b_2, ----, b_n$

نفرض أن: $$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

كما نفرض أن مصفوفة الأزمنة اللازمة لنقل الكمية المتوفرة من المركز i إلى المركز j معلومة وتساوي $[t_{ij}]$.

إذا رمزنا لمقدار ما يجب نقله من المركز i إلى المركز j بالرمز x_{ij} فإننا نجد أن هذه المتحولات يجب أن تحقق الشروط الآتية:

يجب تفصيل الشرط وهي غير مقبولة في الفحص بهذا الشكل

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad ; \quad i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i = \overline{1,m} \;,\; j = \overline{1,n}$$

Scanned by CamScanner

أما تابع الهدف فلا يمكن استخلاصه على شكل تابع رياضي، ولكننا سنستخلص أهم صفاته وخواصه.

نعلم أنه مقابل أية خطة نقل $[x_{ij}]$ يوجد جملة من الأعداد (الأزمنة) نرمز لها بالرمز $[t_{ij}]_x$ تمثل المدة الزمنية المقابلة لتنفيذ عناصر الخطة $[x_{ij}]$.

وبما أن الخطة $[x_{ij}]$ لا تعتبر منفذة إلا إذا كانت قد نفذت عناصرها، بذلك نجد أن مدة تنفيذ الخطة تساوي أكبر عنصر في الجملة $[t_{ij}]_x$ وسنرمز له بـ t_x أي:

$$t_x = \max_{i,j} [t_{ij}]_x$$

وبما أنه لدينا عدد كبير من الخطط القاعدية فإن الخطة المثالية:

$$t_x^* = \min \max_{i,j} [t_{ij}]_x$$

ملاحظة:
إن هذا النموذج ليس نموذجاً خطياً، لأننا لم نستطع التعبير عن الهدف على شكل تابع خطي.

Scanned by CamScanner

تمارين على نماذج النقل : (لم تحلها الدكتورة)

1 نريد نقل 6 أطنان من الحليب من المعمل A ، و 3 أطنان من المعمل B إلى ثلاثة مدن C, D, E حاجاتها على الترتيب 3, 2, 4 طن.
أوجد النموذج الرياضي بحيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن
علماً أن مصفوفة التكاليف هي على الشكل التالي:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل: نفرض x_{ij} هي الكمية المنقولة من المعمل i إلى المدينة j
حيث: $i = 1,2$, $j = 1,2,3$

عندئذٍ يكون النموذج الرياضي كالتالي:
أوجد القيمة الصغرى للتابع:

$$L = 2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23} \longrightarrow \text{Min}$$

ضمن الشروط:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 6$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 3$$
$$x_{11} + x_{21} = 4$$
$$x_{12} + x_{22} = 2$$
$$x_{13} + x_{23} = 3$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

Scanned by CamScanner

/ /

2 ليكن لدينا أربعة مراكز إنتاجية وثلاثة مراكز استهلاكية، بحيث أن الكميات والتكاليف اللازمة لنقلها معطاة بالجدول الآتي:

مركز الإنتاج \ مركز الاستهلاك	1	2	3	الكميات المتوفرة
1	1	2	6	11
2	3	8	1	9
3	7	10	4	13
4	12	8	5	7
الكميات المطلوبة	18	10	12	

الحل: نفرض x_{ij} هي الكمية المنقولة من المركز الإنتاجي i إلى المركز الاستهلاكي j، حيث: $i=\overline{1,4}$ ، $j=\overline{1,3}$

فالنموذج الرياضي: أوجد القيمة الصغرى للتابع:

$$L = x_{11} + 2x_{12} + 6x_{13} + 3x_{21} + 8x_{22} + x_{23} + 7x_{31} + 10x_{32} + 4x_{33} + 12x_{41} + 8x_{42} + 5x_{43} \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 9$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 13$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 7$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 18$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 10$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 12$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i=\overline{1,4} \ , \ j=\overline{1,3}$$

Scanned by CamScanner

3 لدينا خمسة مشاريع : B_1, B_2, B_3, B_4, B_5
تتزود بالمواد الأولية من ثلاثة مصانع : A_1, A_2, A_3
حيث أن الطاقة الإنتاجية لهذه المصانع : 130, 120, 110 على التوالي
وحاجة كل من المشاريع على الترتيب : 90, 80, 60, 40, 100
وكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع i إلى المستودع j معطاة بالجدول التالي :

المشاريع / المصانع	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الطاقة الإنتاجية
A_1	4	1	7	6	9	130
A_2	5	2	6	4	8	120
A_3	6	4	2	5	7	110
الكميات المطلوبة	90	80	60	40	100	

المطلوب :
1) حدد نوع نموذج النقل السابق .
2) صياغة النموذج الرياضي للمسألة السابقة .
3) إذا كانت الطاقة الإنتاجية للمصنع A_1 هي 140 فاكتب النموذج الرياضي للمسألة الجديدة .

الحل : 1) نلاحظ أنه لدينا :

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 130 + 120 + 110 = 360$$

$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 90 + 80 + 60 + 40 + 100 = 370$$

أي أن : $$\sum_{i=1}^{3} a_i < \sum_{j=1}^{5} b_j$$

ومنه لدينا عجز في الإنتاج ، وبالتالي نموذج النقل مفتوح (غير متوازن)

Scanned by CamScanner

٤) نضيف مركزاً إنتاجياً وهمياً A_4 بحيث تكون طاقته الإنتاجية :

$$a_4 = \sum_{j=1}^{5} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 370 - 360 = 10$$

وبحيث كلفة النقل من A_4 إلى كافة المشاريع معدومة .

ليكن x_{ij} هي الكمية المنقولة من المصنع i إلى المستودع j حيث :
$i = \overline{1,4}$ ، $j = \overline{1,5}$

وبالتالي فالتوزيع الرياضي : أوجد القيمة الصغرى للتابع :

$$L = 4x_{11} + x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14} + 9x_{15} + 5x_{21} + 2x_{22} + 6x_{23} + 4x_{24} + 8x_{25} + 6x_{31} + 4x_{32} + 2x_{33} + 5x_{34} + 7x_{35} \longrightarrow Min$$

ضمن القيود :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 130$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 120$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 110$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 10$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 90$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 80$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 60$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 40$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 100$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i = \overline{1,4} \quad , \quad j = \overline{1,5}$$

Scanned by CamScanner

③ إذا كانت الطاقة الإنتاجية للمصنع A_1 هي 140 فيكون :

$$370 = \sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = 370$$

أي ستصبح كمية الإنتاج مساوية لكمية الاستهلاك ، ومنه فالنموذج مغلق

فإذا فرضنا أن x_{ij} هو الكمية المنقولة من المصنع i إلى المستودع j

حيث : $i = \overline{1,3}$ ، $j = \overline{1,5}$

فيصبح النموذج الرياضي . أوجد الهيكل صغرى للتابع :

$$L = 4x_{11} + x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14} + 9x_{15} + 5x_{21} + 2x_{22} + 6x_{23} + 4x_{24} + 8x_{25} + 6x_{31} + 4x_{32} + 2x_{33} + 5x_{34} + 7x_{35} \longrightarrow \text{Min}$$

ضمن القيود :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 130$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 120$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 110$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 90$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 80$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 40$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 100$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i = \overline{1,3} \quad , \quad j = \overline{1,5}$$

Scanned by CamScanner

8 نموذج الإسناد (التعيين):

تهتم هذه النماذج بالإسناد الأفضل لمختلف المواد الاقتصادية والإنتاجية على مختلف الأعمال المراد إنجازها.

تمتاز هذه المسائل ببساطة معالجتها للحالات على عكس مسائل النقل.

في معظم هذه المسائل عادةً تساوي الأعمال المراد إنجازها مع عدد الموارد وأيضاً تابع الهدف يمكن أن يأخذ max أو min.

نص المسألة:

لنفرض أننا نريد توزيع n عاملاً (أو آلة) على n عملاً، بحيث يقوم كل عامل بإنجاز عمل واحد فقط، وبحيث يكون إجمالي الإنتاج لهم أكبر ما يمكن وذلك ضمن الإنتاجية المحددة لكل منهم.

نرمز بـ C_{ij} لإنتاج العامل i من العمل j حيث تمثل مصفوفة الإنتاجيات:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث أن هذه المصفوفة يمكن أن تكون معبرة عن تكاليف العمل بدلاً من الإنتاج.

صياغة النموذج الرياضي:

نرمز بـ X_{ij} للمتحول الذي يأخذ قيمة تساوي الواحد عندما يعين العامل i في العمل j، ويأخذ القيمة صفر عندما يكون العكس

Scanned by CamScanner

لنرتب المتحولات في المصفوفة:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

بما أن العامل الواحد لا يمكن أن يأخذ إلا عملاً واحداً فهذا يعني أن واحداً فقط من المتحولات x_{ij} في السطر i سيأخذ قيمة تساوي الواحد، أما بقية المتحولات في ذاك السطر ستأخذ قيماً تساوي الصفر.

وبما أن العمل الواحد لا يمكن أن يُنفَّذ إلا من قبل عامل واحد فهذا يعني أن واحداً فقط من المتحولات x_{ij} في العمود j سيأخذ قيمة تساوي الواحد، أما بقية المتحولات في ذاك العمود ستأخذ قيماً تساوي الصفر.

وسيكون النموذج الرياضي: أوجد القيمة العظمى للتابع:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = 1$$
$$\vdots$$
$$x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn} = 1$$
$$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{n1} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{n2} = 1$$
$$\vdots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{nn} \neq 1$$

$$x_{ij} = 0 \quad \text{أو} \quad x_{ij} = 1 \quad ; \quad i = \overline{1,n} \;,\; j = \overline{1,n}$$

Scanned by CamScanner

مثال: (لم تحل الكتورة)

لنفرض أنه لدينا ثلاثة أعمال A_1, A_2, A_3 وثلاث آليات B_1, B_2, B_3 بحيث كل عمل يمكن أن ينجز وبشكل كامل باستخدام أية آلة من الآليات الثلاثة.
وبالمقابل كل آلة يمكن أن تنجز أياً من الأعمال الثلاثة.

المطلوب: تخصيص هذه الآليات للأعمال الموجودة بحيث نحصل على الإسناد الأمثل أي الإسناد الذي يعطينا التكلفة الكلية الدنيا، علماً بأن تكاليف هذه الأعمال مبينة في الصفوفة المرفقة.

وكل آلة مخصصة لأداء عمل واحد، وكل عمل ينجز بواسطة آلة واحدة.

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة.

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

الحل: ليكن x_{ij} هو المتحول الذي يأخذ القيمة 1 عندما تعين الآلة i للعمل j، ويأخذ القيمة صفر عندما يكون العكس، حيث: $i, j = \overline{1,3}$

عندئذٍ يكون النموذج الرياضي: أوجد القيمة الصغرى للتابع:

$$L = x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 6x_{23} + 7x_{31} + 8x_{32} + 9x_{33} \rightarrow \text{Min}$$

ضمن القيود:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

$$x_{ij} = 1 \quad ; \quad i, j = \overline{1,3}$$
$$x_{ij} = 0 \quad ; \text{ إذا}$$

انتهت المحاضرة الخامسة

Scanned by CamScanner