الثلاثاء : 25/3/2015

المحاضرة الثانية عملي :

$\frac{1}{46}$) حل الوظيفة :

استخدم طريقة الاستقراء الرياضي لإثبات :

$(48)^2 = 2304 \mid 7^{2n+2} - 48n - 49 = f(n) \quad ; \quad n \geq 0$

الحل :

1. خطوة البداية : نثبت صحتها من أجل $n = 0$

$n = 0 \Rightarrow f(0) = 7^2 - 49 = 0 \Rightarrow 2304 \mid f(0)$ محققة

من أجل $n = 1$

$n = 1 \Rightarrow f(1) = 7^4 - 48 - 49 = 49(49 - 1) - 48$

$= 49(48) - 48$

$= 48(49 - 1) = (48)^2$

$\Rightarrow (48)^2 = 2304 \mid f(1) = (48)^2$ محققة

2. خطوة الاستقراء : نفرض صحة العلاقة من أجل $n = k$ أي

$2304 \mid f(k) = 7^{2k+2} - 48k - 49$ محققة

ونثبت صحة العلاقة من أجل $n = k+1$

نأخذ :

$f(k+1) = 7^{2(k+1)+2} - 48(k+1) - 49$

$= 7^2(7^{2k+2} - 48k - 49) + 48(7)^2k + 49(7)^2$

$- 48k - 48 - 49$

$= 7^2 f(k) + 48k(49 - 1) + 7^4 - 48 - 49$

$= 7^2 f(k) + 48^2 k + f(1)$

كل حد يقبل القسمة على $(48)^2$ وبالتالي $f(k+1)$ تقبل القسمة على $(48)^2$ و

العلاقة صحيحة من أجل $n = k+1$ وبالتالي هي صحيحة من أجل $n \geq 0$

$\frac{2}{46}$ أثبت أنه إذا كان $3x+2$ مضاعفاً للعدد 7 فإن:

$14 \mid 15x^2 - 11x + 14$

الحل:

$$3x + 2 = 7k$$

$$15x^2 - 11x + 14 = (3x+2)(5x-7) + 2 \times 14$$

نميز حالتين:

1) إذا كان العدد x زوجي $\Rightarrow$ $5x - 7$ عدد فردي و $3x+2$ هو عدد زوجي فهو يقبل القسمة على 7 ويقبل القسمة على 2 فهو يقبل القسمة على 14

2) إذا كان العدد x فردي $\Rightarrow$ $5x - 7$ عدد زوجي فهو يقبل القسمة على 2، و $3x+2$ يقبل القسمة على 7 وجداؤهم يقبل القسمة على 14 إذاً

$14 \mid 15x^2 - 11x + 14$

$\frac{4}{46}$ إذا كان $a \in \mathbb{Z}$ فهل يقبل العدد a^2+2 القسمة على 4 أم لا؟

الحل:

نميز حالتين: 1) إذا كان a عدد فردي فإن: $a^2 = 8M + 1$

$$\Rightarrow a^2 + 2 = 8M + 3$$

وهذا لا يمكن أن يكون من مضاعفات العدد 4

2) إذا كان a عدد زوجي فإن:

$$a = 2k \Rightarrow a^2 = 4k^2 \Rightarrow a^2 + 2 = 4k^2 + 2$$

وهذا العدد أيضاً لا يمكن أن يكون من مضاعفات العدد 4

إذاً العدد $a^2 + 2$ لا يقبل القسمة على 4

$\frac{9}{47}$ أوجد أعداداً صحيحة x, y, z تحقق العلاقة:

$$\gcd(198, 288, 512) = 198x + 288y + 512z$$

/ /

الحل:

$gcd(198, 288, 512) = gcd(198, (\underbrace{288, 512}_{d_1}))$

أولاً لنحسب d_1:

$512 = 1 \times 288 + 224$

$288 = 224 \times 1 + 64$

$224 = 3 \times 64 + \boxed{32}$

$64 = 2 \times 32 + 0 \Rightarrow d_1 = 32$

$gcd(198, 32) \overset{?}{=} d$

$198 = 6 \times 32 + 6$

$32 = 5 \times 6 + \boxed{2}$

$6 = 3 \times 2 + 0 \Rightarrow d = 2$

لنكتب هذا الباقي على شكل تركيب خطي:

$2 = 32 - 5 \times 6 = 32 - 5 \times [198 - (6 \times 32)] = -5 \times 198 + 31 \times 32 \quad (1)$

$32 = 224 - 3 \times 64 = 224 - 3 \times (288 - 1 \times 224)$

$= -3 \times 288 + 4 \times 224$

$= -3 \times 288 + 4 \times (512 - 1 \times 288)$

$= 4 \times 512 - 7 \times 288$

نعوض في العلاقة (1)

$2 = -5 \times 198 + 31 \times (4 \times 512 - 7 \times 288)$

$= -5 \times 198 + 124 \times 512 - 217 \times 288$

$\Rightarrow x = -5 \quad , \quad y = -217 \quad , \quad z = 124$

$\frac{3}{46}$) إذا كان $(a,b)=1$ أوجد القيم الممكنة لكل من:

$\gcd(a+b, a-b)$

$\gcd(2a+b, a+2b)$

$\gcd(a+b, a^2+b^2)$

(وظيفة)

ملاحظة: $(a,b)=1 \Rightarrow 1=ax+by$