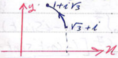
تمارين

1) $I_1 = \int_\gamma z\,dz \;;\; \gamma(t) = 2e^{it} \;;\; t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

الحل

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2e^{it})(2ie^{it})\,dt$$

$$= 4i\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} e^{2it}\,dt = 2i\left[e^{2it}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$



$I_1 = -2$

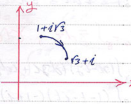
ولنأخذ المسار نفسه لكن بالاتجاه الآخر.

2) $I_2 = \int_\gamma z\,dz \;;\; \gamma(t) = 2e^{i(\frac{\pi}{2} - t)} \;;\; t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2e^{i(\frac{\pi}{2}-t)})(2ie^{i(\frac{\pi}{2}-t)})\,dt$$

$$= -4i\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} e^{2i(\frac{\pi}{2}-t)} = 2\left[e^{2i(\frac{\pi}{2}-t)}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] = 2$$



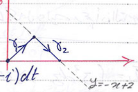
3) $I_3 = \int_\gamma z\,dz$: γ هو الخط المنكسر الذي رؤوسه النقاط $0, 1+i, 2$ على الترتيب

الحل . نقسم γ إلى منحنيين γ_1, γ_2 حيث

$\gamma_1(t) = t + it \;;\; t \in [0,1]$

$\gamma_2(t) = t + i(2-t) \;;\; t \in [1,2]$

ومنه $I_3 = \int_{\gamma_1} z\,dz + \int_{\gamma_2} z\,dz$



$$I_3 = \int_0^1 (t+it)(1+i)\,dt + \int_1^2 (t + i(2-t))(1-i)\,dt$$

$$= (1+i)\left[\frac{t^2}{2} + i\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + (1-i)\left[\frac{t^2}{2} + i\left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\right]_1^2$$

$I_3 = 2$

#

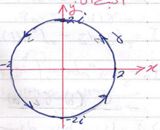
/ /

تمرين نموذجي

أثبت أن:

$$\gamma(t) = 2e^{it} \;;\; t \in [0, 2\pi]$$

$$\left| \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2 - i}\, dz \right| \leq \frac{4}{3} \pi e^2$$



الحل نلاحظ أن γ منحني دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها 2 وبالتالي $L(\gamma) = 4\pi$

كذلك $\forall z \in \gamma : |z| = 2$

$\forall z \in \gamma : |z^2 - i| \geq \big||z|^2 - |i|\big| = 4 - 1 = 3$

وبالتالي $\forall z \in \gamma : \dfrac{1}{|z^2 - i|} \leq \dfrac{1}{3}$

وكذلك $\forall z \in \gamma : |e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{-y+ix}|$

$= |e^{-y} \cdot e^{ix}| = |e^{-y}| \cdot |e^{ix}| = e^{-y} \cdot 1 = e^{-y} \leq e^2$

وبالتالي $\forall z \in \gamma : \left| \dfrac{e^{iz}}{z^2 - i} \right| \leq \dfrac{e^2}{3}$

ومنه حسب خواص التكاملات العقدية يكون $\left| \int_\gamma \dfrac{e^{iz}}{z^2 - i}\, dz \right| \leq \dfrac{4}{3} \pi e^2$

#

وظيفة

① $I_1 = \int_\gamma z\, dz \;;\; \gamma = [1, 1+i, 2+2i]$

② $I_2 = \int_\gamma z\, dz \;;\; \gamma(t) = e^{it} - 1 \;,\; t \in [0, 2\pi]$

③ $\left| \int_\gamma z\, e^{z}\, dz \right| < 2e \;:\; \gamma(t) = t + it \;;\; t \in [0, 1]$

انتهت المحاضرة الثالثة