٤/١٤ الحاضرة التاسعة

تم تبديل دكتور المقرر سامي جديبا بسبب ظروفه الخاصة

وسيعطي بدلاً منه الدكتور محمد الشيخ حتى نهاية الفصل

نشر تايلور للتوابع العقدية:

مبرهنة تايلور:

إذا كان f تابعاً تحليلياً على قرص $D(a,r)$ فإن f قابل للنشر وفق تايلور في هذا القرص

أي $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \forall z \in D(a,r)$

حيث $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad , \forall n \geq 0$

فتصبح على الشكل التالي: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$

وتسمى متسلسلة تايلور للتابع f في جوار a

أو نشر تايلور للتابع f حول a.

⊙ حالة خاصة:

إذا كانت $a=0$ نسمي النشر بنشر ماكلوران لـ f

نتيجة 1:

إذا كان f تحليلياً عند a فهو قابل للنشر وفق تايلور في جوار a.

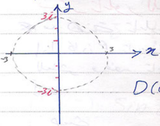
نتيجة 2:

إذا كان f تابعاً تحليلياً على مجموعة G وكانت $a\in G$

فإن f قابل للنشر وفق تايلور في جوار a

وهذا النشر صحيح في أوسع قرص مركزه a ومحتوى في G

مثال: هل للتابع $f(z)=\frac{1}{z^2+9}$ نشر وفق ماكلوران؟



f تحليلي عند الصفر

فهو تحليلي على $G=\mathbb{C}\setminus\{-3i,3i\}$

f قابل للنشر وفق ماكلوران

وهذا النشر صحيح في القرص $D(0,3)$

تذكرة:

$\ln:\mathbb{C}^*\longrightarrow\mathbb{C}$

$\ln(z)=\ln|z|+i(\operatorname{Arg} z+2\pi k)\ ;k\in\mathbb{Z}$

ملاحظة هامة:

القيمة الرئيسية للوغاريتم $-\pi<\operatorname{Arg} z\le\pi$

$Ln(z)=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z$

وهو تابع تحليلي على $\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$

ملاحظة: لو أخذنا $0\le\operatorname{Arg} z<2\pi$

لكان التابع $Ln\, z$ تحليلي على $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty[$

سنعتمد من الآن حتى نهاية المقرر أن $-\pi<\operatorname{Arg} z\le\pi$

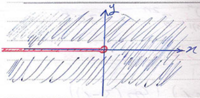
/ /

⊙ إن التابع $f(z)=\ln z$ معرف على $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

⊙ نسمي $z=0$ نقطة تفرع للتابع $\ln z$ وهي وحيدة.

⊙ نقاط التفرع للتابع $f(z)=\ln(g(z))$ هي حلول المعادلة $g(x)=0$.

⊙ خاصة هامة: إذا كان g تحليلي على مجموعة G وكان h تحليلي على $g(G)$ فإن $f=h\circ g$ تحليلي على g.



⊙ إن التابع $Ln(z)$ معرف على $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ وتحليلي على $\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$ والصفر نقطة تفرع للتابع اللوغارتمي.

⊗ نشور شهيرة:

① $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$; $|z|<1$

② $\dfrac{1}{1+z}=\dfrac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=1-z+z^2-z^3+\cdots$; $|z|<1$

③ $f(z)=Ln(1+z)=z-\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{3}-\dfrac{z^4}{4}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}$; $|z|<1$

نقطة التفرع الوحيدة لـ $f(z)$ هي $z=-1$

لأن $g(x)=1+z$ تحليلي على $\mathbb{C}$ و $h(z)=Ln(z)$ تحليلي على $\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$

$h(g(z))=h(1+z)=Ln(1+z)=f(z)$

$\Rightarrow f=h\circ g$

g تحليلي على $\mathbb{C}$ فهو تحليلي على $G=\mathbb{C}\setminus]-\infty,-1]$

و $Ln z$ تحليلي على $g(G)=\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$

$\Leftarrow$ $Ln(1+z)$ تحليلي على $\mathbb{C}\setminus]-\infty,1]$ #

/ /

مناقشة حول انتماء z في التمرين السابق:

إذا كان $z \notin G \Leftarrow z \in]-\infty,-1]$

$\Leftarrow g(z)=z+1 \in]-\infty,0]$

نأخذ العكس $z \in G$

$\Rightarrow z+1 \in \mathbb{C} \setminus]-\infty,0]$

\# ملاحظة: لا يطلب بالامتحان هذا التفصيل هو للشرح والفهم فقط.

(4) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{n+1} \quad , \forall z \in \mathbb{C}$

(5) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad , \forall z \in \mathbb{C}$

(6) منشور $\sin z$ بجوار (i)

$$\sin z = \sin(z-i+i)$$

$$= (\cos(i))\,(\sin(z-i)) + (\sin i)\,(\cos(z-i))$$

$$= (\cos i)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-i)^{2n+1}\right) + (\sin i)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-i)^{2n}\right)$$

\#

(7) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ \#

انتهت المحاضرة التاسعة