/ /

حلول عددية

المحاضرة التاسعة

١٣/٤/٢٠١٥م

شرط CFL لاستقرار المعادلة $u_t + a u_x = 0$:

لتكن لدينا معادلة تفاضلية جزئية ما ، نعرّف ما يلي :

- منطقة الحل الفعلي : هي المنطقة التي يتحقق ضمنها الحل الفعلي .
- منطقة الحل التقريبي : هي مجموعة كل النقاط المؤثرة على الحل التقريبي .

يناقش معيار CFL الاستقرار من خلال مقارنة منطقة الحل التقريبي مع منطقة الحل الفعلي ، ولكن متى نستطيع فعل ذلك علينا معرفة شكل منطقة الحل الفعلي ، ويتم ذلك إذا عرفنا شكل الحل الفعلي .
وإن المعادلة التفاضلية الجزئية الوحيدة التي نعرف (تحليلياً) شكل حلها الفعلي هي معادلة الموجة من المرتبة الأولى :

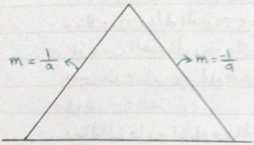
$$u_t + a u_x = 0$$

حيث أن شكل الحل الفعلي لها هو : $u(t,x) = f(x-at)$

ملاحظة : ما معنى شكل الحل الفعلي ؟
إننا في الحقيقة نعلم شكل الحل الفعلي وليس الحل الفعلي نفسه .
حيث أن الحل الفعلي تابع لِ $(x-at)$ وللتوضيح يمكن أن نأخذ أمثلة لتوابع من الشكل السابق :

$$e^{x-at} \quad , \ln(x-at) \quad , (x-at)^2 \; , \cos^2(x-at)$$

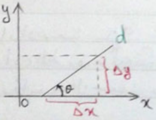
ونحن لا نعرف الحل تماماً ولكن نعلم تحليلياً أنه من هذا الشكل وحسب .



يفيدنا ذلك بأننا في هذه الحالة يمكننا أن نجزم بأن الحل الفعلي محصور في كل لحظة بين المستقيمين المائلين اللذين ميلاهما :

$$\frac{1}{a} \; , \; \frac{-1}{a}$$

أي يصبح شكل منطقة الحل الفعلي كما هو موضح بالشكل المرسوم جانباً.



تذكرة: ما هو ميل المستقيم d ؟

إن ميل المستقيم d هو $tg\,\theta$

حيث θ هي الزاوية بين d والمحور $\vec{Ox}$

أي هو : $m = tg\,\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

يناقش معيار CFL الاستقرار بالاعتماد على مناقشة ميل مستقيم متحرك ميله هو $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ يمثل منطقة الحلول التقريبية في شبكة الفروق المنتهية ومقارنته مع ميلي المستقيمين المحددين لمنطقة الحلول الفعلية كما يلي :

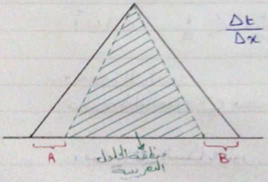
1) إذا كان $\boxed{\left|\frac{\Delta t}{\Delta x}\right| > \frac{1}{a}}$

أي : $\frac{\Delta t}{\Delta x} > \frac{1}{a}$ أو $\frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{-1}{a}$

ومعنى ذلك أن :

منطقة الحل الفعلي $\subset$ منطقة الحل التقريبي

ويوضح ذلك الشكل المجاور :



في الحقيقة لا نستطيع هنا أن نتوقع تقارب الحل التقريبي من الحل الفعلي وذلك لأن الحل التقريبي لا يستخدم الشروط الحدية كلها، إذ أن هناك جزء من القيم الحدية مثل القيم الموجودة في الفترتين A , B غير مأخوذة بعين الاعتبار في الحل التقريبي، بينما يعتمد الحل الفعلي حتماً على القيم الحدية في هاتين الفترتين.

وبالتالي فإن اختلاف الشروط الحدية في هاتين الفترتين سيؤثر على الحل الفعلي بينما لن يتأثر الحل التقريبي، لذا لا يمكننا توقع تقارب الحلين في هذه الحالة.

وبالتالي لن تكون الطريقة مستقرة في هذه الحالة.

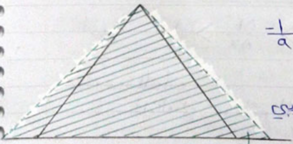
- إذا وضعنا $\lambda = \frac{ak}{h}$ كما فعلنا في تحليل فورييه فنجد حسب شرط CFL أن الطريقة لن تكون مستقرة عندما $|\lambda| > 1$ وهذا يتوافق مع نتيجة دراسة الاستقرار حسب تحليل فورييه.

② إذا كان $\boxed{\left|\frac{\Delta t}{\Delta x}\right| = \frac{1}{a}}$ فهذا يعني أن:
منطقة الحل الفعلي منطبقة على منطقة الحل التقريبي
وهذا لا يتعارض بأي شكل من الأشكال مع الاستقرار.

③ إذا كان $\boxed{\left|\frac{\Delta t}{\Delta x}\right| < \frac{1}{a}}$

أي أن: $-\frac{1}{a} < \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{a}$

ومعنى ذلك أن:
منطقة الحل الفعلي $\subset$ منطقة الحل التقريبي



منطقة الحلول التقريبية

ويوضح ذلك الشكل المجاور.

في هذه الحالة فإن الحل التقريبي يعتمد بشكل كامل على الشروط الحدية وبالتالي من الممكن أن تكون الطريقة مستقرة.

- ونلاحظ أنه إذا كانت $|\lambda| \leq 1$ فمن الممكن أن تكون الطريقة مستقرة.
وكل ما سبق يتوافق تماماً مع نتائج دراسة الاستقرار لمعادلة الموجة من المرتبة الأولى حسب تحليل فورييه.

الخلاصة:

- إن شرط CFL يتطلب أن تحوي المنطقة العددية (الناتجة عن طريقة الفروق المنتهية) منطقة تعريف المعادلة التفاضلية الجزئية.

- معيار CFL هو أن تكون القيمة: $\lambda = \frac{ak}{h} \leq 1$.

- إن تحقق شرط CFL هو أمر لازم، ولكنه غير كافٍ للاستقرار.
بعبارة أخرى:
إذا لم يتحقق شرط CFL $\Leftarrow$ الطريقة غير مستقرة ولا داعي لتطبيق تحليل فورييه.
إذا تحقق شرط CFL $\Leftarrow$ لا يعني شيء، ويجب تطبيق تحليل فورييه لمعرفة إذا ما كانت الطريقة مستقرة أم لا.

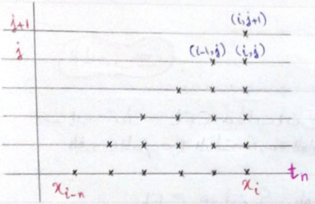
دراسة شرط CFL لعدة طرائق:

١) طريقة Up wind:

إن معادلة الفروق لهذه الطريقة لها الشكل:

$$u_i^{j+1} = (1-\lambda)\, u_i^j + \lambda\, u_{i-1}^j$$

لنرسم منطقة الحل التقريبي:



حسب معادلة الفروق لحساب النقطة $(i, j+1)$

يتوجب علينا تعيين النقطتين:

$(i-1, j)$, (i, j)

وأيضاً لحساب النقطة $(i-1, j)$

علينا تعيين النقطتين:

$(i-2, j-1)$ و $(i-1, j-1)$

وهكذا ينتج لدينا الشكل المرسوم على شكل مثلث قائم متساوي الساقين (عدد الخطوات الزمانية = عدد الخطوات المكانية)

- فإذا أثبتنا الزمن في لحظة ما t_n ، فحتى تكون منطقة الحل الفعلي محتواة في منطقة الحل التقريبي يجب أن يتحقق مايلي:

$$x_{i-n} \leq x_i - a t_n$$

$$\Rightarrow x_i - nh \leq x_i - ank$$

$$\Rightarrow -nh \leq -ank$$

$$\Rightarrow h \geq ak \Rightarrow \frac{ak}{h} \leq 1 \Rightarrow \lambda \leq 1$$

ومنه فشرط CFL محقق ومن الممكن أن تكون الطريقة مستقرة.

② طريقة Downwind :

وهي طريقة تقدمية لكل من الزمن والمسافة :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^{j}}{k} + a\,\frac{u_{i+1}^{j} - u_i^{j}}{h} = 0$$

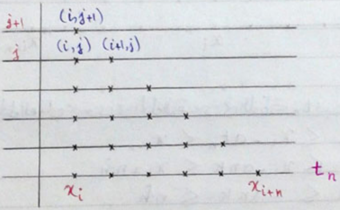
$$u_i^{j+1} = u_i^{j} - \frac{ak}{h}\left[u_{i+1}^{j} - u_i^{j}\right]$$

نضع : $\lambda = \frac{ak}{h}$

$$u_i^{j+1} = (1+\lambda)\,u_i^{j} - \lambda\, u_{i+1}^{j}$$

وهي معادلة الفروق.

نرسم منطقة الحل التقريبي كما سبق :



متى تكون منطقة الحل الفعلي محتواة في منطقة الحل التقريبي في لحظة ما t_n يجب أن يتحقق ما يلي :

$$x_i - a t_n \leq x_{i+n}$$

$$x_i - ank \leq x_i + nh$$

$$-ank \leq nh$$

$$-ak \leq h \Rightarrow \frac{ak}{h} \geq -1$$

$$\Rightarrow \lambda \geq -1$$

وبالتالي من الممكن أن تكون $\lambda > 1$ وبالتالي شرط CFL غير محقق

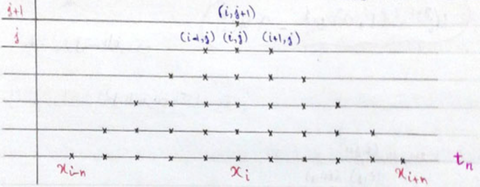
ومنه فالطريقة غير مستقرة ولا داعي لتطبيق تحليل فورييه.

3) طريقة FTCS:

إن معادلة الفروق لهذه الطريقة لها الشكل:

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{\lambda}{2}\left[u_{i+1}^j - u_{i-1}^j\right]$$

إن لمنطقة الحل التقريبي الشكل:



حتى يكون الحل الفعلي محتوى في الحل التقريبي في اللحظة t_n يجب أن يتحقق:

$$x_{i-n} \leq x_i - a t_n \leq x_{i+n}$$

$$x_i - nh \leq x_i - ank \leq x_i + nh$$

$$-nh \leq -ank \leq nh$$

$$-1 \leq \frac{-ak}{h} \leq 1$$

$$1 \geq \lambda \geq -1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow |\lambda| \leq 1$$

تحقق شرط CFL وبالتالي يمكن لطريقة FTCS أن تكون مستقرة.

ولكن عند دراسة استقرار هذه الطريقة حسب تحليل فورييه وجدنا أنها غير مستقرة.
وهذا يدل على أن شرط CFL هو شرط غير كافٍ.

4) طريقة Lax-Wendroff :

إن معادلة الفروق لهذه الطريقة لها الشكل :

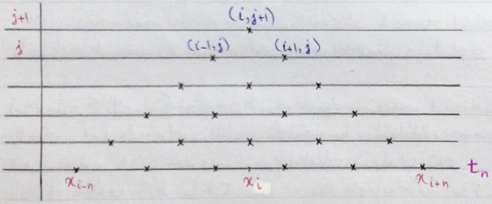
$$u_i^{j+1} = \frac{\lambda}{2}(1+\lambda)\, u_{i-1}^{j} + (1-\lambda^2)\, u_i^{j} - \frac{\lambda}{2}(1-\lambda)\, u_{i+1}^{j}$$

إن منطقة الحل التقريبي الشكل نفسه في طريقة FTCS وسيكون شرط CFL محققاً بنفس الطريقة أيضاً.

5) طريقة Lax-Friedrichs :

إن معادلة الفروق لهذه الطريقة لها الشكل :

$$u_i^{j+1} = \frac{1}{2}(1-\lambda)\, u_{i+1}^{j} + \frac{1}{2}(1+\lambda)\, u_{i-1}^{j}$$



حتى يكون الحل الفعلي محتوى في الحل التقريبي في اللحظة t_n يجب أن يتحقق :

$$x_{i-n} \le x_i - a t_n \le x_{i+n}$$

بمناقشة مماثلة نجد أن $|\lambda| \le 1$ وبالتالي شرط CFL محقق.

⑥ طريقة Leap frog : (Centered)

إن معادلة الفروق لهذه الطريقة لها الشكل :

$$u_i^{j+1} = u_i^{j-1} + \lambda u_{i-1}^{j} - \lambda u_{i+1}^{j}$$

إن لمنطقة الحل التقريبي الشكل نفسه في طريقة Lax-Friedrichs وسيكون شرط CFL محققاً بنفس الطريقة .

⑦ طريقة كرانك نيكلسون :

إن جميع الطرق السابقة هي طرق ظاهرية ، حيث كانت تحسب قيمة التابع في اللحظة j+1 اعتماداً على قيمه في اللحظات التي تسبقها .
وبالتالي كانت منطقة الحل التقريبي المعتمدة على مخطط stencil لمعادلة الفروق تأخذ في كل طريقة شكلاً معيناً قد تحوي منطقة الحل الفعلي وقد لا تحوي .

أما طريقة كرانك - نيكلسون فهي طريقة ضمنية حيث تعتمد لحساب قيمة التابع في اللحظة j+1 على قيم أخرى للتابع في اللحظة نفسها ، ولو حاولنا رسم منطقة الحلول التقريبية لوجدنا أنها ستحوي منطقة الحل الفعلي دون أدنى شك .
وبالتالي سيكون شرط CFL محققاً ، وبشكل عام فإن شرط CFL محقق في الطرق الضمنية .
، لكن كما نعلم فإن ذلك غير كافٍ للاستقرار وإنما علينا حتماً تطبيق تحليل فورييه .
وقد وجدنا سابقاً أن طريقة كرانك - نيكلسون حسب تحليل فورييه ذات استقرار غير مشروط .

تعميم طريقة الفروق إلى 2-D :

ترى هل يمكن تعميم دراستنا السابقة على بعد مكاني واحد x إلى بعدين مكانيين x, y ، واعتماد الطرق بحيث يبقى الاستقرار محققاً وبنفس الشروط تماماً؟

في الحقيقة إن الانتقال من بعد واحد إلى بُعدَين يغيّر كل الدراسات السابقة! .
فعلى الرغم من اعتمادنا تحليل فورييه بشكل مشابه لدراسة الاستقرار ولكن النتائج ستختلف كثيراً.

وستصبح دراستنا بثلاثة متحولات t, x, y بأدلة ثلاثة n, i, j على الترتيب.
وسنستطيع دراسة استقرار طريقة واحدة فقط لنوع واحد من المعادلات.

- لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$u_t = a(u_{xx} + u_{yy})$$

حيث $a > 0$ ثابت معلوم .

وحيث : $x \in [a_x, b_x]$, $y \in [a_y, b_y]$

وحيث يتم تقسيم الشبكة كما يلي :

$$x_i = x_0 + i\Delta x \quad ; i = 0, \dots, M$$

$$y_j = y_0 + j\Delta y \quad ; j = 0, \dots, N$$

حيث :

$$\Delta x = \frac{b_x - a_x}{M+1} \quad , \quad \Delta y = \frac{b_y - a_y}{N+1}$$

- لنأخذ على سبيل المثال طريقة FTCS (تقدمية الزمن ومركزية الموضع)
عندئذٍ :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} = a\left[\frac{u_{i-1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i+1,j}^{n}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n}}{(\Delta y)^2}\right]$$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + a\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left[u_{i-1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i+1,j}^{n}\right] + a\frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}\left[u_{i,j-1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n}\right]$$

لنضع: $\beta = a\dfrac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$, $\alpha = a\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ فتصبح معادلة الفروق بالشكل:

$$u_{i,j}^{n+1} = \alpha\left[u_{i-1,j}^{n} + u_{i+1,j}^{n}\right] + \beta\left[u_{i,j-1}^{n} + u_{i,j+1}^{n}\right] + (1-2\alpha-2\beta)\,u_{i,j}^{n}$$

مرتبة خطأ الاقتطاع: $\tau = \left((\Delta t)^1, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2\right)$

دراسة الاستقرار:

نفرض الحل من الشكل: $u_{i,j}^{n} = W_n \cdot e^{I(r_1 x_i + r_2 y_j)}$

حيث $I = \sqrt{-1}$

نعوض في معادلة الفروق فنحصل بعد الإصلاح على العلاقة:

$$G = 1 - 4\alpha\sin^2\left(\frac{r_1\Delta x}{2}\right) - 4\beta\sin^2\left(\frac{r_2\Delta y}{2}\right)$$

تكون الطريقة متقاربة إذا تحقق:

$$|G| < 1 \Rightarrow |1-4(\alpha+\beta)| < 1$$

$$\Rightarrow -1 \overset{①}{<} 1-4(\alpha+\beta) \overset{②}{<} 1$$

① : $4(\alpha+\beta) < 2 \Rightarrow \boxed{\alpha+\beta < \frac{1}{2}}$

② : $-4(\alpha+\beta) < 0$ ✓

وبالتالي شرط الاستقرار هو $\alpha+\beta < \frac{1}{2}$.

انتهت المحاضرة التاسعة