الخميس 26/3/2015

المحاضرة الخامسة

* **تعريف:** لتكن L مجموعة غير خالية، عندئذ:

L شبكة إذا وفقط إذا كانت L مزودة بعمليتين جبريتين ثنائيتين $\wedge, \vee$ وتحقق الشروط التالية:

$$a, b, c \in L$$

1. $a \wedge a = a \quad , \quad a \vee a = a$
2. $a \wedge b = b \wedge a \quad , \quad a \vee b = b \vee a$
3. $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
   $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
4. $a = a \wedge (a \vee b) \quad , \quad a = a \vee (a \wedge b)$

الاثبات:

($\Leftarrow$) لنفرض أن L شبكة عندئذ يمكن تعريف علاقة جبرية ثنائية كالآتي

$$a, b \in L \; ; \quad a \vee b = \sup\{a, b\} \in L$$

لأن شبكة L يوجد علاقة ترتيب $a \wedge b = \inf\{a, b\} \in L$

ومنه حسب مبرهنة سابقة ان الخواص الاربعة محققة.

($\Rightarrow$) لدينا من الفرض L مجموعة غير خالية ولنعرف العلاقة التالية على المجموعة L كالآتي:

$$a, b \in L \; ; \; a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

لنثبت أن علاقة ترتيب:

- العلاقة $\leqslant$ انعكاسية: حسب الفرض $a \wedge a = a$ وبالتالي $a \leqslant a$
- العلاقة $\leqslant$ تخالفية: $a, b \in L \; ; \; a \leqslant b \;\&\; b \leqslant a$

$$\Rightarrow a \wedge b = a \;\&\; b \wedge a = b \overset{②}{\Longrightarrow} a = b$$

- العلاقة $\leqslant$ متعدية:

$$c, a, b \in L \; ; \; \left.\begin{matrix} a \leqslant b \\ b \leqslant c \end{matrix}\right\} \begin{matrix} a \wedge b = a \\ b \wedge c = b \end{matrix}$$

$$a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c \overset{③}{=} a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a \Longrightarrow a \leqslant c$$

وبالتالي $(L, \leqslant)$ مجموعة غير خالية مرتبة.

لنثبت أن L شبكة:

$$x, y \in L : \; x = x \wedge (x \vee y) \Rightarrow x \leqslant x \vee y$$
$$y = y \wedge (y \vee x) \Rightarrow y \leqslant y \vee x$$

$\left.\begin{matrix} x \vee y \text{ حد أعلى} \\ \text{لـ } \{x, y\} \end{matrix}\right\}$

لنثبت ان $x \vee y$ أصغر حد أعلى:

ليكن t حد أعلى لـ $\{x, y\}$ عندئذ يكون $x \leqslant t, \; y \leqslant t$

ILOVID.net
صنو الحضارة

$x \le t \Rightarrow x \wedge t = x \Leftrightarrow x \vee t = t$

$y \le t \Rightarrow y \wedge t = y \Leftrightarrow y \vee t = t$

$(x \vee y) \vee t = x \vee (y \vee t) = x \vee t = t \Rightarrow x \vee y \le t$

$\Rightarrow \sup\{x,y\} = x \vee y \in L$ ..... (*)

$x = x \vee (x \wedge y) \Rightarrow x \wedge y \le x$

$y = y \vee (y \wedge x) \Rightarrow x \wedge y \le y$

$x \wedge y$ حد ادنى للمجموعة $\{x,y\}$

لنثبت انه (inf) أكبر حد ادنى:

ليكن t حد ادنى للمجموعة $\{x,y\}$ عندئذ:

$t \le x \Leftrightarrow x \wedge t = t$

$t \le y \Leftrightarrow y \wedge t = t$

$(x \wedge y) \wedge t = x \wedge (y \wedge t) = x \wedge t = t \Rightarrow t \le x \wedge y$

$\Rightarrow \inf\{x,y\} = x \wedge y \in L$ ..... (*)

ومنه L شبكة.

تعريف: لتكن L مجموعة غير خالية مزودة بعمليتين جبريتين ثنائيتين مثل $\wedge$ و $\vee$؛ نقول أن $(L, \vee, \wedge)$ انها شبكة اذا وفقط اذا تحققت الشروط الاتية المذكورة في القرين السابق.

نتيجة: كل شبكة هي جبر شامل مزودة بمجموعة من العمليات الجبرية هي $\vee$ و $\wedge$

تعريف: لتكن L شبكة و H مجموعة جزئية غير خالية من L إن H شبكة جزئية من L اذا وفقط اذا تحققت:

$h_1, h_2 \in H : h_1 \vee h_2 \in H$ مغلقة بالنسبة

$h_1 \wedge h_2 \in H$ للعمليتين.

وبتعبير آخر H جبر شامل جزئي من L كـ جبر شامل: $h_1 h_2 \vee_2 \in H$ ، $h_1 h_2 \wedge_2 \in H$

أمثلة: 1 لتكن G زمرة و L مجموعة كل الزمر الجزئية من G والتي تشكل شبكة عندئذ

H مجموعة كل الزمر الجزئية الناظمية من G تشكل شبكة جزئية من L

$H_1 \wedge H_2 = H_1 \cap H_2 \in L$ ، $H_1 \vee H_2 = \langle H_1 \cup H_2 \rangle \in L$ لأن الالحاق ليس بالضرورة أن يكون زمرة جزئية لذلك نأخذ المولد بالالحاق.

2 لتكن $(G, *)$ زمرة. ان شبكة المثاليات في حلقة زمرة تشكل شبكة جزئية من شبكة الزمر الجزئية من G ، ؟؟ .

Finished Lecture ...

ALMOUD.net
أسامة الحطارة