2015/11/16

المسافات المترية:

تعريف: نسمي التابع

$$|\_| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

المعرف بالشكل الآتي:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تابع القيمة المطلقة أو اختصاراً القيمة المطلقة.

خواص القيمة المطلقة:

1/ أياً كان $x \in \mathbb{R}$ فإن $|x| \geq 0$, محقق:

واضح من التعريف.

2/ • $x = 0 \iff |x| = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

الإثبات:

* إذا كان $x = 0$ عندئذٍ من التعريف

$|x| = x = 0$

** إذا كان $|x| = 0$ عندئذٍ ⊡ $x \geq 0$ عندئذٍ

$0 = |x| = x$

⊡ $x < 0$ عندئذٍ

$0 = |x| = -x$

ومنه $x = 0$

3/ أياً كان $x \in \mathbb{R}$ فإن $|x| \geq x$

من التعريف لنبرهنه

- إذا كان $x \geqslant 0$ عندئذ $|x| = x$ محققة

- إذا كان $x < 0$ عندئذ $|x| = -x > x$.

ومنه ونجمع الحالتين معاً $|x| \geqslant x$

4/ $|-x| = |x|$, $\forall x \in R$

- إذا كان $x \geqslant 0$ عندئذ $|x| = x$

فيكون $-x < 0$ ومنه

$$|-x| = -(-x) = x$$

وبالحالتين $|x| = |-x|$

- إذا كان $x < 0$ عندئذ $|x| = -x$

$-x > 0$ ومنه

عندئذ $|-x| = -x$

وبالتالي $|x| = |-x|$

5/ $|x.y| = |x|.|y|$, $\forall x, y \in R$

- إذا كان $x, y \geqslant 0$ عندئذ

$x.y > 0$ ومنه

$$|x.y| = x.y = |x|.|y|$$

- إذا كان $x, y < 0$ عندئذ

$x.y > 0$

$$|x.y| = x.y = (-x).(-y)$$

من 4/

$$= |-x|.|-y| = |x|.|y|$$

- إذا كان $x>0 , y<0$ عندئذٍ $x.y<0$

$$|x.y| = -(x.y) = x.(-y)$$
$$= |x|\,|-y| = |x|.|y|$$

6/ $|x+y| \leq |x|+|y| \quad , \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

- إذا كان $x,y>0$ عندئذٍ
$x+y>0$

$$|x+y| = x+y = |x|+|y|$$

- إذا كان $x,y<0$ عندئذٍ
$x+y<0$

$$|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y)$$
$$= |-x|+|-y| = |x|+|y|$$

- إذا كان $x>0 \; , \; y<0$

* إذا كان $x+y>0$ عندئذٍ

$$|x+y| = x+y < |x|+(-y) = |x|+|-y| = |x|+|y|$$

** إذا كان $x+y<0$ عندئذٍ

$$|x+y| = -(x+y) = -x+(-y) < x+|-y| = |x|+|y|$$

- الفضاء المتري

تعريف: لتكن X مجموعة غير خالية نسمي كل تابع من الشكل

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

يحقق الشروط الآتية

$\forall x,y \in X \quad ; \quad d(x,y) \geq 0$

$\forall x,y \in X \quad ; \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$\forall x,y \in X \quad ; \quad d(x,y) = d(y,x)$

$\forall x,y,z \in X \quad ; \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ نقول عن

تابع مسافة على X ونسمي الثنائية (X,d) فضاءً متريّاً.

/أمثلة/ II الثنائية العادية $(\mathbb{R},d)$ هي فضاء متري، حيث:

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

قانون التعريف نفسه $\quad d(x,y) = |x-y|$

نوضح أن.

$$d(x,y) \geq 0$$

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0$$
$$\Leftrightarrow x-y = 0$$
$$\Leftrightarrow x = y.$$

$$d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |y-x|$$
$$= d(y,x)$$

$$d(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)|$$
$$\leq |x-y| + |y-z|$$
$$= d(x,y) + d(y,z)$$

(هذا التابع بالتعريف 2 ليس وحيد حيث
أنه من الممكن تابع يحقق الخواص لكن هذا
السائد هو المألوف)

SABBAGH STATIONERY

2 التالي (R^2, d_1) تشكل فضاءً متريًا حيث

$$d_1 : R^2 \times R^2 \longrightarrow R$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|$$

الشروط محققة دائمًا

$$d_2 : R^2 \times R^2 \longrightarrow R$$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2}$$

ما تسمى المسافة المعروفة في R^2

تعريف: ليكن (X,d) فضاءً متريًا، وليكن $a \in X$، ولنفرض أن $r \in R$ ، $r > 0$ تسمى المجموعة

$$N(a,r) = \{x : x \in X , d(x,a) < r\}$$

كرة مفتوحة في فضاء X مركزها a ونصف قطرها r

مجموعة النقاط x من X التي تبعد عن a بأقل من r

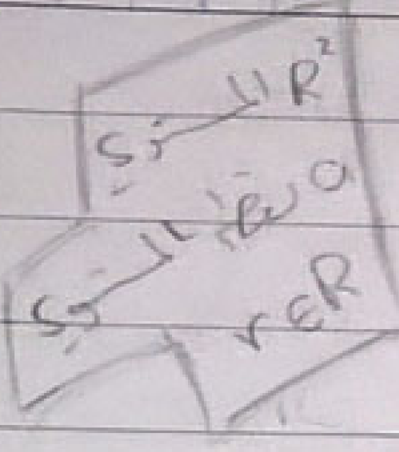
مثال: شكل الكرة المفتوحة في R العادي

* إذا كانت $X = R$ مزودة بالمسافة المألوفة، وكانت $a, r \in R$ حيث $r > 0$ ، فإن

$$N(a,r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$$
$$= \{x \in R : -r < x - a < r\}$$
$$= \{x \in R : a - r < x < a + r\}$$
$$=]a - r , a + r[$$

مجال مفتوح مركزه a ونصف قطرها r.

"مجال متناظر بالنسبة لنقطة ما هو شرط يكون متناظر بالنسبة للصفر"



★

$$N(a,r)=\{x : x\in R^2 \; ; d(x,a)=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i-a)^2}<r\}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i-a)^2}<r$$ بالتربيع للطرفين

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2}(x_i-a)^2<r^2$$

تعريف: ليكن (X,d) فضاء متري، ولكن $a\in X$ ولنفرض أن $r>0$, $r\in R$ تسمى المجموعة

$$N(a,r)=\{x : x\in X \; , d(x,a)\leq r\}$$

كرة مغلقة في فضاء X مركزها a ونصف قطرها r

مثال:

إذا كان $X=R$ مزودة بالمسافة المألوفة وكان $a,r\in R$ حيث $r>0$ فإن

$$N(a,r)=\{x : x\in R \; , |x-a|\leq r\}$$
$$=\{x : x\in R \; , -r\leq x-a\leq r\}$$
$$=\{x : x\in R \; , a-r\leq x\leq a+r\}$$
$$=[a-r, a+r]$$

مجال مغلق

تعريف: ليكن (X,d) فضاء متري، ولكن $a\in X$ ولنفرض أن $r\in R$, $r>0$ تسمى المجموعة.

$$N(a,r)=\{x : x\in R \; , d(x,a)>r\}$$

سطح الكرة في X مركزها a ونصف قطرها r.

تعريف: ليكن (X,d) فضاء متري وليكن $a\in X$ ولنفرض أن $r\in R$، $r>0$، نسمي المجموعة.

$$N(a,r)=\{x : x\in X , d(x,a)=r\}$$

سطح الكرة في X مركزها a ونصف قطرها r.

انتهت.