مبرهنة: إذا كانت $K \subseteq \mathbb{R}^n$ متراصة و f دالة مستمرة على K عندئذ تكون

1- الدالة f محدودة

2) تدرك الدالة f حدها الأعلى وحدها الأدنى

نتائج: ١- تركيب دوال مستمرة بانتظام هي دالة مستمرة بانتظام

٢- f مستمر بانتظام فهو مستمر

٣- f غير مستمرة فهي غير مستمرة بانتظام

٤- الاستمرار على مجموعة متراصة يعطينا الاستمرار بالانتظام

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 - x - 1$$

1) إن f مستمر على $[-1,1]$ (مجموع دوال مستمرة هي دالة مستمرة)

2) $[-1,1]$ مغلقة ومحدودة فهو متراص

وبالتالي f مستمرة على مجموعة متراصة فهي مستمرة بانتظام على $[-1,1]$.

تمرين:

$$f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$$

اثبت انه لا توجد نهاية للدالة f في النقطة $(0,0)$

إن $(0,0)$ نقطة حدية لـ $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

لنأخذ المتتاليتين:

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\} \to (0,0)$$
$$n \to \infty$$

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{5} \quad , \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \frac{2}{5}$$

مثال: لتكن : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,2) \\ \dfrac{\left(x^2+(y-2)^2+1\right)^{\frac{1}{2}}-1}{x^2+(y-2)^2} & (x,y) \neq (0,2) \end{cases}$$

أ- اثبت أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = \frac{1}{2}$

ب- هل f مستمر في $(0,2)$

الحل: نفرض $x^2+(y-2)^2 = a$

$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 , 0 < \|(x,y)-(0,2)\| < \delta$

$\Rightarrow \left|\dfrac{\sqrt{a+1}-1}{a} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$ نريد أن نثبت أن أصغر من ε

$$\left|\frac{\sqrt{a+1}-1}{a} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2\sqrt{a+1}-2-a}{2a}\right| = \left|\frac{2\sqrt{a+1}-1-a-1}{2a}\right|$$

(مطابقة)

$$\left|\frac{2\sqrt{a+1}-(1+a)-1}{2a}\right| = \left|\frac{(1+a)-2\sqrt{1+a}+1}{2a}\right| = \left|\frac{(\sqrt{1+a}-1)^2}{2a}\right|$$

نعوض عن قيمة البسط

$$= \left| \frac{(\sqrt{1+a}-1)^2(\sqrt{1+a}+1)^2}{2a(\sqrt{1+a}+1)^2} \right| = \left| \frac{(1+a-1)^2}{2a(\sqrt{1+a}+1)^2} \right|$$

$$= \left| \frac{a}{2(\sqrt{1+a}+1)^2} \right| < \frac{|a|}{2} < \underbrace{\frac{\delta^2}{2}}_{\varepsilon}$$

نأخذ :

$$\boxed{\|(x,y)-(0,2)\| = \|(x,y-2)\| = \sqrt{x^2+(y-2)^2} = \sqrt{a} < \delta}$$

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta = \sqrt{2\varepsilon} > 0 , 0 < \|(x,y)-(0,2)\| < \delta$$

$$\Rightarrow \left| f(x,y) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = \frac{1}{2}$$

إذن f غير مستمرة عند (0,2) لأن

$$f(0,2) \neq \lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y)$$

مثال 3 :

$$g, f : R^2 - \{(0,0)\} \to R$$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$$

$$g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

أ- اثبت أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (0,0)$

ب- بيّن أنه لا توجد نهاية للدالة g في (0,0)

الحل:

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 , 0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$$

التاريخ: / / ٢٠

الموضوع:

$$|f(x,y)-0| = \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x\cdot y}\right| \le x^2+y^2 < \delta^2$$

وبالتالي نختار ε $\varepsilon = \delta^2$ ومنه

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists\, \delta=\sqrt{\varepsilon}>0,\ \|(x,y)-(0,0)\|<\delta$$

$$\Rightarrow |f(x,y)-0|<\varepsilon$$ أي يوجد للدالة f نهاية في $(0,0)$

$$\boxed{|\sin\theta|\le 1}$$

لـ $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$$\left\{\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$g\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n},\frac{1}{2}\right)=0$$

$$g\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n^2}}=\frac{3}{5} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{5}$$

ومنه لا يوجد نهاية للدالة g في $(0,0)$

ش 4: ادرس استمرار الدالة f في النقطة $(0,0)$ $\quad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

الحل:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \|(x,y)-(0,0)\|<\delta$$

$$\Rightarrow |f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$$

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^4}{x^2+y^2} = \frac{x^2\cdot x^2}{x^2+y^2} \le \frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$= x^2 < x^2+y^2 < \delta^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\|(x,y)-(0,0)\| \text{ إذا} \\ &= \sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow x^2+y^2<\delta^2 \end{aligned}}$$

نختار $\varepsilon = \delta^2$ ومنه:

$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta = \sqrt{\varepsilon} > 0 \ , \ \|(x,y)-(0,0)\| < \delta$
$\Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$

أي f مستمر عند $(0,0)$

مثال 5: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- برهن أن f مستمر على كل مستقيم مار من مبدأ الاحداثيات $(0,0)$ دون أن يكون مستمر في هذه النقطة.

الحل: معادلة المستقيم المار في $(0,0)$. $\boxed{y = \alpha x}$

نقطة مدنية $(0,0)$

نعوض بدل كل y بـ αx في السابقة

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha^2 x^3}{x^2+\alpha^4 x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha^2 x}{1+\alpha^4 x^2} = 0 = f(0,0)$$

ومنه هي مستمرة

- نريد اختبارها على منحني: $\boxed{y^2 = x}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

نعوض كل y بـ $\sqrt{x}$

وهي غير مستمرة

وظيفة:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x} & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases}$$

اثبت أن f مستمر على $\mathbb{R}^2$