الأربعاء: 25/3/2014

الحاضرة الخامسة:

الفصل الثالث: "الأعداد الأولية"

تعريف:

نقول عن العدد الصحيح p إنه عدد أولي إذا كان يقبل القسمة فقط على نفسه وعلى الواحد.

إذا لم يكن العدد أولي نسميه عدد مؤلف.

n عدد مؤلف: أي يوجد عددين صحيحين موجبين a, b بحيث يكون:

$$n = a.b$$

$$1 < a < n \quad , \quad 1 < b < n$$

بعض خواص الأعداد الأولية:

1) الأعداد الأولية هي أولية مثنى مثنى.

2) إذا كان $p|n$ فإن $(p, n) = p$

إذا كان $p \nmid n$ فإن $(p, n) = 1$ أوليان فيما بينهما

3) إذا كان p عدداً أولياً وكان $p|a.b$ و $(p, b) = 1$ فإن $p|a$

4) إذا كان $p|a_1.a_2 \ldots a_n$ فإن p يقسم أحد a_i الأعداد على الأقل حيث $a_i \in Z^+$; $(i = 1, 2, \ldots n)$

5) إذا كانت $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$ أعداداً أولية وكان $p|p_1.p_2 \ldots p_n$ فإن p يساوي أحد الأعداد الأولية p_i

الإثبات:

بما أن p يقسم جداء الأعداد p_i فهو يقسم أحدها على الأقل ولنفرض أن $p|p_k$

ولكن p_k عدد أولي لا يقبل القسمة إلا على نفسه وعلى الواحد فيجب أن يكون

$$p = p_k$$

المبرهنة الأساسية في الحساب:

إن أي عدد صحيح $n > 1$ هو إما عدد أولي أو هو جداء عدد منتهٍ من الأعداد الأولية وهذا التمثيل كجداء منتهٍ من الأعداد الأولية وحيد

الإثبات:

نستخدم طريقة الاستقراء الرياضي:

1- الخطوة الأساسية:

لدينا $n = 2$ عدد أولي ، $n = 3$ عدد أولي

$n = 4 = 2 \times 2$ ، $n = 5$ عدد أولي ، $n = 6 = 2 \times 3$

2- خطوة الاستقراء:

نفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل كل الأعداد $n > 1$ حتى العدد k ولنثبت صحتها من أجل $n = k + 1$

- إذا كان $k + 1$ أولي حصلنا على المطلوب

وإن كان $k + 1$ عدداً مؤلفاً فيمكن كتابته على النحو: $k + 1 = a.b$ بحيث

$1 < a < k + 1$ ، $1 < b < k + 1$

وإن كل من a و b أقل من k هي جداء منتهٍ من الأعداد الأولية وبالتالي يكون $k + 1$ جداء منتهٍ من الأعداد الأولية. والقضية صحيحة من أجل أي عدد صحيح $n > 1$

لنثبت الآن أن تمثيل العدد كجداء عوامل أولية هو تمثيل وحيد (بالاستقراء الرياضي).

الخطوة الأساسية:

$4 = 2 \times 2$ ، $6 = 2 \times 3$ العلاقة صحيحة.

خطوة الاستقراء:

نفرض أنها محققة من أجل كل الأعداد حتى k ولنبرهن ذلك من أجل العدد $k + 1$

ولنفرض جدلاً أنه يمكن كتابة $k + 1$ كجداء عوامل أولية بشكلين مختلفين

$$k + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdots p_t = q_1 q_2 \cdots q_s$$

$$p_1 \mid q_1 \cdots q_s \Rightarrow p_1 = q_i$$

/ /

تغيير التسمية: $p_1 = q_i = q_1$

$$k+1 = p_1 \cdot p_2 \cdots p_t = p_1 q_2 \cdots q_s$$

نختصر على p_1 نحصل على العدد

$$n = p_2 \cdots p_t = q_2 \cdots q_s$$

و $k+1 > n$

أي أن n يكتب بشكل وحيد كجداء منتهٍ من الأعداد الأولية نحايد على أن $s = t$ و

أن تمثيل $k+1$ كجداء عوامل أولية هو أيضاً تمثيل وحيد.

ملاحظة:

يمكن جمع الأسس للأعداد الأولية إذا كانت مكررة في الجداء وبذلك نكتب n بالشكل القانوني

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \qquad ; \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}^+$$

والأعداد p_i أولية مختلفة ؛

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_r$$

مثال:

$$360 = 2^3 \, 3^2 \, 5$$

نتيجة (1):

إذا كان العدد الصحيح $n > 1$ فله عامل أولي $p \mid n$ (p أولي)

نتيجة (2):

إذا كان $n > 1$ عدد مؤلف فله عامل أولي $p \leq \sqrt{n}$ (p أولي)

الإثبات:

بما أن n مؤلف $\Leftarrow$ n يكتب على الشكل $n = a.b$

$1 < a \leq b < n$ ومنه $n = a.b \geq a^2$

$\Leftarrow$ $a \leq \sqrt{n}$ و $1 < a$ فله عامل أولي وليكن p أي

$$p \mid a \Rightarrow p \mid n \; ; \; p \leq a \Rightarrow p \leq \sqrt{n}$$

نتيجة (3):

إذا كان $n > 1$ وليس له عامل أولي $p \leq \sqrt{n}$ فيكون n أولي

الإثبات:

نفرض أن $n > 1$ غير أولي أي له عامل أولي $p \leq \sqrt{n}$ وهذا يناقض الفرض وبالتالي n عدد أولي.

مبرهنة:

عدد الأعداد الأولية غير منته.

الإثبات:

نفرض أن عدد الأعداد الأولية منته، وهذه الأعداد هي: $p_1, p_2, \dots, p_k$

نأخذ العدد

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k + 1$$

$N > 1$ له عامل أولي وليكن p أي أن $p \mid N$، وإذا كان p يساوي أحد الأعداد الأولية $p_1, \dots, p_k$ أي $p \mid p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ وبالتالي:

$$p \mid N - p_1 \cdots p_k = 1 \Rightarrow p \mid 1$$

وهذا تناقض أي أن p عدد أولي يختلف عن $p_1, \dots, p_k \Leftarrow$ عدد الأعداد الأولية غير منته.

- نلاحظ أن الصيغة: $N = p_1 \cdots p_k + 1$

تعطينا أعداد أولية

$N_1 = 2 + 1 = 3$ أولي

$N_2 = 2 \times 3 + 1 = 7$ أولي

$N_3 = 2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$ أولي

$N_4 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211$ أولي

$N_5 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1 = 2311$ أولي

لكن : $N_6 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30031 = 59 \times 509$

عدد غير أولي.

وتسمى هذه الأعداد أعداد إقليدس.

انتهت المحاضرة...