الاثنين . # المحاضرة الثالثة 16/3/2015

مبرهنة: لتكن $(L,\leq)$ شبكة و $a,b,c\in L$ فإن القضايا التالية صحيحة:

1) $a\vee a = a \quad , \quad a\wedge a = a$ خاصة اللانمو.

2) $a\wedge(a\vee b) = a \quad , \quad a\vee(a\wedge b) = a$ قانونا الامتصاص

3) $$\left.\begin{aligned} a\wedge(b\wedge c) &= (a\wedge b)\wedge c \\ a\vee(b\vee c) &= (a\vee b)\vee c \end{aligned}\right\}$$ الخاصة التجميعية.

الإثبات:

بما أن $\leq$ علاقة ترتيب اذاً هي انعكاسية:

$\boxed{1}$ $a\leq a \Rightarrow a\wedge a = \inf\{a,a\}$

$a\vee a = \sup\{a,a\}$

$\boxed{2}$ $$\left.\begin{aligned} a &\leq (a\vee b) = \sup\{a,b\} \\ a &\leq a \end{aligned}\right\} \rightarrow a\leq a\wedge(a\vee b) \ldots *$$

$a\wedge(a\vee b) = \inf\{a, a\vee b\} \leq a \Longrightarrow a\wedge(a\vee b)\leq a \ldots *$

من كون العلاقة $\leq$ علاقة تخالفية فإن $a = a\wedge(a\vee b)$ وهو المطلوب.

وحسب مبدأ الثنوية نجد أن $a = a\vee(a\wedge b)$. "أو تبرهن بنفس الأسلوب السابق"

$\boxed{3}$ $$\left.\begin{aligned} \star\ a\wedge(b\wedge c) &\leq a \\ a\wedge(b\wedge c) &\leq b\wedge c \leq b \end{aligned}\right\} \rightarrow a\wedge(b\wedge c)\leq a\wedge b \ \star$$

$\&$ $a\wedge(b\wedge c)\leq(b\wedge c)\leq c \ \star \xrightarrow[\star]{\star} a\wedge(b\wedge c)\leq(a\wedge b)\wedge c \ldots \circledast$

$$\left.\begin{aligned} \star\ (a\wedge b)\wedge c &\leq a\wedge b \leq b \\ (a\wedge b)\wedge c &\leq c \end{aligned}\right\} (a\wedge b)\wedge c \leq b\wedge c \ \ldots \mathrm{I}$$

$(a\wedge b)\wedge c \leq a\wedge b \leq a \ \mathrm{II} \xrightarrow[\mathrm{II}]{\mathrm{I}} (a\wedge b)\wedge c \leq a\wedge(b\wedge c) \ldots \circledast$

ومنه $(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$

• وحسب مبدأ الثنوية نستنتج تحقق: $(a\vee b)\vee c = a\vee(b\vee c)$

ملاحظة: • التقاطع والاجتماع تبديليان وتجميعياً .

• يمكن تعميم خاصة التجميع من اجل n عنصر.

يمكن النظر الى الشبكات على انها بنية جبرية كحالة خاصة من الجبور الشاملة وهذا يعني انه يمكن ان يعرف مفهوم الشبكة دون استخدام علاقة الترتيب فقط على شكل قوانين تشكيل ، بل يمكن تعريف على عمليتين ثنائيتين مثل الحلقة.

سوف نبدأ ببعض التعاريف الأساسية:

التعريف الجبري للشبكة :

لتكن $G \neq \phi$ مجموعة غير خالية , n عدد طبيعي $n \geq 2$ إن العملية الجبرية ذات المرتبة n على G تعرف على انها تطبيق يعطى بالشكل

$$f : G^n \longrightarrow G$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1 . x_2 \dots x_n . w$$

حيث ان w يعبر او يستخدم للتعبير عن ذلك (اي عن العملية الجبرية)

- من اجل $n=1$ فانه يقال عن العملية الجبرية ذات المرتبة n انها عملية جبرية احادية اذا وفقط اذا وجد تطبيق :

$$f : G \longrightarrow G$$

$$x \longmapsto x w$$

- من اجل $n=0$ فان العملية الجبرية ذات المرتبة n تسمى عملية جبرية صفرية على G اذا وفقط اذا كان اختيار عنصر معين (محدد) من G مستقل عن اختيار اي عنصر من G .

مما سبق نكون قد عرفنا عملية جبرية ذات المرتبة n من اجل كل الاعداد الطبيعية .

امثلة :

1- اذا كانت $n=3$ فان العملية الجبرية ذات المرتبة ثلاثة على G هي تطبيق

$$f : G^3 \longrightarrow G$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto x_1 . x_2 . x_3 . w$$

القانون القصير

$a \cup b \cup c$

2- مثال من اجل $n=2$ تكون العملية الجبرية ذات المرتبة الثانية على G هي قانون تشكيل داخلي .

3- من اجل $n=1$ تكون العملية الجبرية الاحادية مثال التطبيق المطابق :

$$f : G \longrightarrow G$$

$$x \longrightarrow x$$

4- من اجل $n=0$ تكون العملية عملية اختيار الحيادي في G تشكل عملية جبرية ذات مرتبة صفر .

تعاريف :

صفر بنسبة كلية

الغروبوئيد (نظام رياضي) : هو مجموعة غير خالية مثل G مزودة بعملية ثنائية جبرية . مثال : اي زمرة هي نظام رياضي .

$(IN^*, .)$ أو $(IN, +)$ انظمة رياضية .

نصف الزمرة : (شبه زمرة) : هي مجموعة غير خالية مزودة بقانون تشكيل داخلي

كما يمكن تعريفها على انها نظام رياضي تكون العملية الثنائية الجبرية داخلية .

ملاحظة: كل نصف زمرة هي نظام رياضي و لكن العكس ليس صحيح بالضرورة

مثال معاكس: $(IN, -)$ نظام رياضي لكن ليست نصف زمرة.

* المونوئيد (نصف زمرة واحدية): هو نصف زمرة تملك عنصر حيادي بالنسبة للعملية الثنائية المزودة بها. مثال: $(IN, +)$ أو $(IN^*, .)$

* الزمرة: Group: مجموعة غير خالية مزودة بعملية جبرية ثنائية * (نكتب $(G,*)$).

تحقق مايلي: ① العملية * تجميعية.

② يوجد في G عنصر حيادي بالنسبة للعملية * ونرمز له ب e.

③ لكل عنصر في G يوجد نظير في G بالنسبة للعملية *

كما انه يمكن تعريف الزمرة على انها مونوئيد بحيث يكون كل عنصر فيه مقلوب بالنسبة للعملية الجبرية الثنائية المزودة

ملاحظة: اذا كانت الزمرة G مزودة بقانون الجمع كعملية جبرية ثنائية، تسمى G زمرة جمعية. ونرمز للحيادي بهذه الحالة بالرمز 0.

• وبالمثل اذا كانت الزمرة G مزودة بقانون الضرب كعملية جبرية ثنائية، تسمى G زمرة ضربية، ونرمز للحيادي بهذه الحالة بالرمز 1.

* الزمرة الجزئية من الزمرة الجمعية $(G,+)$: هي مجموعة جزئية غير خالية من G مثل H تحقق

$$x, y \in H : x - y \in H$$

* الزمرة الجزئية من الزمرة الضربية $(G,.)$: هي مجموعة جزئية غير خالية من G مثل H تحقق:

$$x, y \in H : x y^{-1} \in H$$

* الزمرة الجزئية الناظمية من زمرة جمعية $(G,+)$: هي زمرة جزئية مثل H من الزمرة G وتحقق الشرط:

$$g \in G , h \in H : g + h - g \in H$$

* الزمرة الجزئية الناظمية من زمرة ضربية $(G,.)$: هي زمرة جزئية مثل H من الزمرة G وتحقق الشرط:

$$g \in G , h \in H : g . h g^{-1} \in H$$

ملاحظة: كل زمرة جزئية من زمرة تبديلية تكون زمرة جزئية ناظمية

لتكن G زمرة و لتكن $\{H_i\}_{i\in I}$ مجموعة من الزمر الجزئية من G ونرمز للزمرة الجزئية المولدة بالزمر الجزئية H_i حيث $i \in I$ بالشكل $\langle \bigcup_{i\in I} H_i \rangle$

وعندئذ $x \in \langle \bigcup_{i\in I} H_i \rangle$ اذا وفقط اذا امكن كتابة x بالشكل:

$$x = h_{i_1} . h_{i_2} \cdots h_{i_m} ; \quad h_{i_j} \in H_i \text{ و } j = 1, \dots, n$$

اما في حالة الزمر الجمعية فان $x \in \langle \bigcup_{i \in I} H_i \rangle$ اذا وفقط اذا امكن كتابة x بالشكل

$$x = h_{i_1} + h_{i_2} + \dots + h_{i_m} \; ; \quad h_{i_j} \in H_i \;\&\; j \in \overline{1:m}$$

الحلقة: لتكن R مجموعة غير خالية مزودة بقانوني تشكيل داخليين يرمز للاول بـ $+$ ويسمى الجمع وللثاني بـ $\cdot$ ويسمى الضرب.

نقول عن النظام الرياضي $(R,+,\cdot)$ بانه حلقة اذا وفقط اذا تحقق الشروط التالية:

1- $(R,+)$ زمرة تبديلية.

2- $(R^*,\cdot)$ نصف زمرة.

3- $\forall a,b,c \in R \; : \; a(b+c) = ab + ac$

ملاحظة: ⊙ ان العمليتين $\cdot$ و $+$ هما عمليتان جبريتان ثنائيتان.

⊙ اذا كان قانون التشكيل الثاني (الضرب) تبديلي اي ان:

$a,b \in R \; : \; a \cdot b = b \cdot a$

فان R حلقة تبديلية.

⊙ اذا وجد حيادي في R بالنسبة لقانون التشكيل الضرب يرمز له 1 ونقول أن R حلقة واحدية (ذات عنصر محايد).

الحلقة الجزئية: لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة و S مجموعة جزئية غير خالية من R نقول عن S انها حلقة جزئية من R اذا وفقط اذا تحقق:

$$x,y \in S \; : \; x - y \in S \;\;\&\;\; x \cdot y \in S$$

Finished Lecture....