تعميم: $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ حيث مجموعة D مفتوحة
ولتكن c نقطة داخل D ولنفرض أن
أولاً: المشتقات الجزئية الصرفة حتى المرتبة $n-1$ موجودة بالساحة D
ثانياً: " " " المختلطة " " n " ومستمرة
عند النقطة c
إذا تحقق الشرطين عندئذ قيمة أي مشتق جزئي مختلط بالنقطة c مستقل عن الترتيب الذي يجري فيه الاشتقاق

تعريف المشتق الاتجاهي: لتكن f دالة معرفة على المجموعة الجزئية D المحتواة في R^n ومستقرها R ولتكن c تنتمي لداخل D ولنفرض أن
$u \in R^n$ وإن $\|u\| = 1$
إذا وجدت النهاية التالية
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+hu)-f(c)}{h}$$
فإننا نسميها مشتق الدالة f بالنقطة c
باتجاه u ونرمز لها بـ $\frac{\partial F}{\partial u}(c)$ أي

$$\frac{\partial F}{\partial u}(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+hu)-f(c)}{h}$$

ملاحظة: إن هذا التعريف ليس إلا تعميم لمفهوم المشتق الجزئي الذي تعرفنا عليه سابقاً وذلك عندما نعتبر الشعاع u هو هو أحد الأشعة القانونية في R^n

$$\{e_1(1,0,\dots,0),\ e_2(0,1,0,\dots,0),\ \dots\ (0,0,0,\dots,1)\}$$
$$u = e_1 \Longrightarrow \|u\| = 1$$

$$c = c(c_1, c_2, \dots, c_n) \qquad c + he_1 = (c_1, c_2, \dots, c_n) + h(1,0,\dots,0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial e_1}(c) = \lim \frac{f(c_1+h, c_2, c_3, \dots c_n) - f(c_1, c_2, \dots c_n)}{h}$$
وهذا المشتق الجزئي بالنسبة للمتغير الأول

ملاحظة: ((كل مشتق جزئي هو مشتق اتجاهي ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح))

مثال:

$$f: R^2 \to R$$

حيث

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

ولتكن $C(0,0)$ و $u(\alpha,\beta)$ حيث $\alpha^2+\beta^2=1$

أوجد المشتق الاتجاهي لـ u عند النقطة 0 $\dfrac{\partial F}{\partial u}(c)$

الحل: إذن $\|u\| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 1$

$$f(c+hu) = f(h\alpha, h\beta) = \frac{h^3\alpha\beta^2}{h^2(\alpha^2+\beta^2)} = h\alpha\beta^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+hu)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\alpha\beta^2-0}{h} = \alpha\beta^2$$

مثال:

$$f: R^n \to R$$

$$x \mapsto f(x) = \|x\|^2$$

ولتكن $c \in D^{\circ}$ ، $u = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ، $C(c_1, c_2, \dots c_n)$

أوجد $\dfrac{\partial F}{\partial u}(c)$

الحل: إذن $\|u\| = 1$

$$c + hu = \left(c_1 + \frac{h}{\sqrt{n}}, c_2 + \frac{h}{\sqrt{n}}, \dots, c_n + \frac{h}{\sqrt{n}}\right)$$

$$f(c+hu) = \left(c_1 + \frac{h}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(c_2 + \frac{h}{\sqrt{n}}\right)^2 + \dots + \left(c_n + \frac{h}{\sqrt{n}}\right)^2$$

$$f(c+hu) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2\frac{h}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} c_i + h^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(c) = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2\frac{h}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} c_i + h^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2}{h}$$

$$= \lim \left(\frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} c_i + h \right) = \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} c_i$$

ملاحظة: إذا طُلب منا إيجاد المشتقة اتجاهياً في مشتقة اتجاه يكون فيها نظيم الـ u يساوي الواحد . $\boxed{v = \frac{u}{\|u\|}}$

مثال: $u(2,3)$ ، $\|u\| = \sqrt{13}$ ومنه $v = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right)$

((تفاضلات الدوال الحقيقية لمتغيرين)):

$$f : D \subseteq R^2 \to R$$

ولتكن $C \in D^0$ حيث $C(a,b) \in D^0$ ((أي توجد كرة مفتوحة مركزها a,b نصف قطرها δ))

ولنفرض أن h ، k عددان حقيقيان يحققان الشرط

$$\|(h,k)\| < \delta$$

فإذا وجد عددان A, B بحيث

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \mu(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

بحيث:

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \mu(h,k) = 0$$

فإننا نقول أن الدالة F قابلة للتفاضل في النقطة A, B

لإيجاد A ، B

1) نفرض $k = 0$

$h+\mu$

$$f(a+h, b) - f(a,b) = Ah + \mu\sqrt{h^2}$$

نقسم على h

$$\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = A \mp \mu$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} A \mp \mu \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b) = A \mp \lim\limits_{h\to 0} \mu(h,k)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A = f_x(a,b)}$$

2) نعوض $\boxed{h=0}$ ⇐ $\lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} = B \mp \lim\limits_{k\to 0}\mu(h,k)$

المقدار $\lim \mu(0,k)$ يساوي الصفر ⇐ $f_y = \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) = B$

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = f_x(a,b)\cdot h + f_y(a,b)\cdot k + \mu(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

شرط: $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \mu(h,k) = 0$

تمرين:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $(0,0)$

الحل:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$f(h,k) - f(0,0) = \mu\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\frac{hk^2}{h^2+k^2} = \mu\sqrt{h^2+k^2} \Longrightarrow \mu(h,k) = \frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

عندما: $h = k$

$$\mu(h,h) = \frac{h^3}{(2h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{h^3}{2\sqrt{2}\cdot h^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

غير قابل للاشتقاق

ملاحظة: إذا كان f قابل للاشتقاق أو المفاضلة في النقطة (a,b) عندئذ يكون في لـ f مشتقات جزئية موجودة f_x, f_y في النقطة (a,b) إما إذا كان f_x ، f_y موجودان هنا لا يستلزم بالضرورة أن يكون f قابل للاشتقاق

وظيفة: $f(x,y) = x^2 + 2xy \quad (a,b)$

ادرس قابلية الاشتقاق عند (a,b)