تعريف:

لنفرض $f, g, h \in K[x_1, \dots, x_n]$ حيث $g \neq 0$ ثبت علاقة ترتيب على الحدوديات عندئذٍ:

نقول أن f ينتقل إلى h عبر g إذا وفقط إذا وجد X حد من حدود f يقبل القسمة على $Lp(g)$ حيث:

$$h = f - \frac{X}{Lt(g)}\, g$$

نسمي h بالباقي الأول

وبالتالي: لتقسيم f على g نكرر العملية السابقة حتى نحصل على $r \in K[x_1, \dots x_n]$ كل حد من حدوده لا يقبل القسمة على $Lp(g)$ أي:

$$f \xrightarrow{g} h_1 \xrightarrow{g} h_2 \xrightarrow{g} \dots \xrightarrow{g} r$$

حيث نسمي r بالباقي.

فإذا كانت $r = 0$ نقول أن f يقبل القسمة على g أو g يقسم f

(هنا: على الحد الأول لا يقبل والثاني يقبل بخلاف حالة متحول واحد).

مثال: لنفرض $f = x^4 + y^4 + x^3y^3$ ، $g = 2x^3 + 3y^3 + 4x^2y^2 \in \mathbb{R}[x, y]$

أوجد باقي قسمة f على g من أجل $x \underset{L}{>} y$ ، $y \underset{L}{>} x$ ، $x \underset{gL}{>} y$

الحل:

* من أجل $x \underset{L}{>} y$ يكون:

$$Lt(g) = 2x^3$$

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^3 - y^2 \\ \hline 2x^3 + 4x^2y^2 + 3y^3 & x^4 + x^3y^3 + y^4 \\ & x^4 + 2x^3y^2 + \frac{3}{2}xy^3 \\ & x^3y^3 - 2x^3y^2 - \frac{3}{2}xy^3 + y^4 \\ & x^3y^3 + 2x^2y^5 + \frac{3}{2}y^6 \end{array}$$

نرتب مقدماً:

$$-2x^3y^2-2x^2y^5-\frac{3}{2}xy^3-\frac{3}{2}y^6+y^4$$
$$\mp 2x^3y^2 \mp 4x^2y^4 \mp 3y^5$$

$$r = -2x^2y^5+4x^2y^4-\frac{3}{2}xy^3-\frac{3}{2}y^6+3y^5+y^4$$

تأكدنا أنه كل حد لا يقسمه $2x^3$ مثال ** يوضح أنه حاصل الحد لا يقسم الأول والثاني يقسم

$$Lt(g) = y^4 \qquad : y >_L x \quad *$$

$$\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{9}x^2$$
$$3y^3+4xy^2+2x^3 \;\big)\; y^4+y^3x^3+x^4$$
$$\cancel{y^4}+\frac{4}{3}y^3x^2+\frac{2}{3}yx^3$$

$$\cancel{y^3x^3}-\frac{4}{3}y^3x^2-\frac{2}{3}yx^3+x^4$$
$$\cancel{y^3x^3}+\frac{4}{3}y^2x^5+\frac{2}{3}x^6$$

$$-\frac{4}{3}y^3x^2-\frac{4}{3}y^2x^5-\frac{2}{3}yx^3-\frac{2}{3}x^6+x^4$$
$$\cancel{-\frac{4}{3}y^3x^2}-\frac{16}{9}y^2x^4-\frac{8}{9}x^5$$

$$x >_{gL} y >_{gL} z$$
$$y^3z^4+1 \;\big)\; x^{10}y^2z^3+y^5z^6$$
y^3z^4 لا تقسم $\qquad$ y^3z^4 يقسم

$$r = -\frac{4}{3}y^2x^5+\frac{16}{9}y^2x^4-\frac{2}{3}yx^3-\frac{2}{3}x^6+\frac{8}{9}x^5+x^4$$

$$x >_{glex} y \quad *$$

$$Lt(g) = 4x^2y^2$$

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{4}xy \\ \hline 4x^2y^2+2x^3+3y^3 & x^3y^3+x^4+y^4 \\ & x^3y^3+\frac{1}{2}x^4y+\frac{3}{4}xy^4 \\ \hline \end{array}$$

$$r = -\frac{1}{2}x^4y - \frac{3}{4}xy^4 + x^4 + y^4$$

رمز المجموعة المرتبة.

* خوارزمية القسمة في $K[x_1,...x_n]$

بفرض $f, f_1, ... f_s \in K[x_1...x_n]$ عندئذ من أجل $H=[f_1,... f_s]$

كثيرات حدود مرتبة غير صفرية عندئذ يوجد $q_1,...q_s, r \in K[x_1,...x_n]$ حيث

لا نشترط التقسيم كلياً.

يكون

$$f = q_1f_1 + ... + q_sf_s + r$$

حيث $q_i=0$ أو $Lp(f) \geq Lp(q_if_i)$ من أجل $i=1,...s$

و $r=0$ أو كل حد من حدود r لا يقبل القسمة على كل من $Lp(f_1),...,Lp(f_s)$

وهذه العملية تتم بتقسيم f على f_1 أولاً ثم نأخذ الباقي ونقسمه على f_2 وهكذا..

حتى نحصل على r حيث نسمي r باقي القسمة فإذا كان $r=0$ عندئذ يكون

$f \in \langle f_1,...f_s \rangle$، إلا أن العكس غير صحيح بالضرورة.

تمرين: بفرض

$$f = x^2y + 3x + 2xy + x^3 + 2$$

$$f_1 = x^2+y+1,\quad f_2 = xy+2 \in \mathbb{R}[x,y]$$

من أجل $x>y$ أوجد باقي قسمة f على $[f_1,f_2]$ ثم على $[f_2,f_1]$ وهل

$f \in \langle f_1, f_2 \rangle^{Lex}$!!

الحل: 1

$$\begin{array}{l} \quad x+y \leftarrow q_1 \\ x^2+y+1 \;\big)\; \cancel{x^3}+x^2y+2xy+3x+2 \\ \qquad\qquad\quad \cancel{x^3}+xy+x \\ \hline \qquad\qquad\quad \cancel{x^2y}+xy+2x+2 \\ \qquad\qquad\quad \cancel{x^2y}+y^2+y \\ \hline \qquad\qquad\quad xy+2x-y^2-y+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad 1 \leftarrow q_2 \\ xy+2 \;\big)\; \cancel{xy}+2x-y^2-y+2 \\ \qquad\qquad \cancel{xy}+2 \\ \hline \qquad\qquad 2x-y^2-y \leftarrow r \end{array}$$

2

$$\begin{array}{l} \quad x+2 \\ xy+2 \;\big)\; x^3+\cancel{x^2y}+2xy+3x+2 \\ \qquad\qquad \cancel{x^2y}+2x \\ \hline \qquad\qquad x^3+2xy+x+2 \\ \qquad\qquad 2xy+4 \\ \hline \qquad\qquad x^3+x-2 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x \\
\hline
x^2+y+1 & x^3+x-2 \\
 & x^3+xy+x \\
\hline
 & -xy-2
\end{array}
$$

نلاحظ أنه : $r_2 = -f_2$ ومنه $f \in \langle f_1, f_2 \rangle$

$$f = (x+2) f_2 + x f_1 + r_2$$
$$= (x+1) f_2 + x f_1$$

....

نتحقق

$$(x+1) f_2 + x f_1 =$$
$$(x+1)(xy+2) + x(x^2+y+1)$$
$$= x^2y + 2x + xy + 2 + x^3 + xy + x$$

$$= x^3 + x^2y + 2xy + 3x + 2 = f$$

وظيفة: برهن

$$f = xyz^2 + 2z + x^2 + yz + 1$$

$$f_1 = x^2 + yz + 1 \quad , f_2 = xyz + 2 \in \mathbb{R}[x, y, z]$$

من أجل $z \underset{gl}{>} y \underset{gl}{>} x$ ، أوجد باقي قسمة f على $[f_1, f_2]$ ثم باقي

قسمة f على $[f_2, f_1]$ وهل $f \in \langle f_1, f_2 \rangle$

انتهت المحاضرة

$z > y > x$

/ /

حل وظيفة م الرابعة:

$q_1 \leftarrow zx + 1$

$zy + x^2 + 1 \;\big|\; z^2yx + zy + x^2 + 2z + 1$

$-\;\cancel{\mp z^2yx} \mp zx^3 \mp zx$

$-zx^3 + zy - zx + x^2 + 2z + 1$

$zy + x^2 + 1$

$-zx^3 - zx + 2z$

$xyz + 2 \;\big|\; -zx^3 - zx + 2z$

z

$xyz + 2 \;\big|\; \cancel{zyx} + zy + x^2 + \cancel{2z} + 1$

$\cancel{z^2yx} \qquad + \cancel{2z}$

$zy + x^2 + 1 \leftarrow r_1$

1

$zy + x^2 + 1 \;\big|\; \cancel{zy + x^2 + 1}$

$\cancel{zy + x^2 + 1}$

0

ومنه:

$f = z f_2 + f_1 + 0 \longrightarrow f \in \langle f_1, f_2 \rangle$

Rehab