الاثنين: ١٢/٤/ ١٠م

محاضرة (8)

4-1-8: تعريف:

1- لتكن R حلقة و $I,J\trianglelefteq R$

نعرف نسبة المثالي I للمثالي J بالشكل

$$I:J=\{r\in R \;,\; r.J\subseteq I\}\trianglelefteq R$$

2- نعرف جذر المثالي I بالشكل

$$\sqrt{I}=\{r\in R \;,\; \exists n\geq 0 \;,\; r^n\in I\}\trianglelefteq R$$

أمثلة:

$R(\mathbb{Z},+,\cdot)$ و $I=\langle 2\rangle \;,\; J=\langle 6\rangle$

$I:J=\langle 1\rangle$

$J:I=\langle 2\rangle$ $\quad J:I=\{r\in R : r.I\subseteq J\}$

$=\{r\in R : r.\langle 2\rangle\subseteq\langle 6\rangle\}$

4-1-9: مبرهنة:

لتكن $J_1,J_2,\dots,J_n$ و $I_1,I_2,\dots,I_n$ مثاليات في R

1- $I:J\trianglelefteq R$ $\qquad J:I\trianglelefteq R$

2- $\left(I:\sum_{i=1}^{n} I_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(I:I_i)$

3- $k\trianglelefteq R$ $\qquad (I:Jk)=(I:k):J$

(الإثبات يترك للطالب)

الفصل الثالث: الحدوديات القابلة للتحليل (الاختزال):

3-2-1: تعريف الحدودية القابلة للاختزال.

3-2-2: تعريف محتوى مسبقاً.

متى تكون الحدودية قابلة للتحليل بمعامل الانفصال مع الجذور ؟

3-2-3 : مبرهنة:

إذا كانت F حقلاً و $f(x)\in F[x]$ حيث:

$$\deg(f)=2 \lor \deg(f)=3$$

$f(x)$ قابلة للتحليل على F $\longleftrightarrow$ كان r صفراً لـ $f(x)$ في $F[x]$

الإثبات:

← نفرض أن r صفراً لـ $f(x)$ حيث $(x-r)$ يقسم $f(x)$ أي:

$$f(x)=(x-r).\,u(x) \quad ; \quad \exists\, u(x)\in F[x]$$

$$\deg(u(x))=2 \lor \deg(u(x))=1$$

→

نفرض $f(x)$ قابلة للتحليل على F ومنه $\exists\, h(x), g(x)\in F[x]$

$$f(x)=g(x).h(x).$$

$$0<\deg(g)<\deg(f)=2\lor 3$$

$$0<\deg(h)<\deg(f)=2\lor 3.$$

- إذا كان $\deg(f)=2$ فإن:

$$\deg(h)=\deg(g)=1.$$

$\rightarrow h=ax+b \quad , \quad g=cx+d$

; $a,b,c,d\in F.$

صفر لـ g $\quad r'=-\frac{d}{c}\in F \qquad\qquad r=\frac{-b}{a}\in F$ صفر لـ h

(أي الجذر موجود)

ومنه يكون صفراً لـ $f(x)$

إذا كان $\deg(f)=3$ فإن:

إما $h(x)=cx+d.$ أو $g(x)=ax+b$

وفي كلا الحالتين ، $r=\frac{-b}{a}\in F$ صفراً لـ $f(x)$

3-2-4: مساعدة لمبرهنة إقليدس

إذا كان F حقل و $f(x), g(x) \in F[x]$

و $p(x) \in F[x]$ حدودية غير قابلة للتحليل على F

فإن: $p|f.g \leftarrow p|f \vee p|g$

الإثبات:

نفرض $p|f.g$ تقسم و $p|f$ لا تقسم

حسب خوارزمية القسمة $\gcd(p(x), f(x))=1$

$1 = S(x).f(x)+t(x).p(x) \quad \exists S(x), t(x) \in F[x]$

يصبح لدينا:

$$g(x)= S(x).f(x)+t(x).p(x).g(x)$$

$\leftarrow p|f.g$

$$\exists h(x) \in F[x] ; \quad f(x).g(x)=p(x).h(x)$$

$$g(x)= S(x).h(x)+t(x).p(x).g(x)$$

$$g(x)= [S(x).h(x)+t(x).g(x)]p(x)$$

$\rightarrow p|g$

ملاحظة:

إذا كان $f_1, f_2, \ldots, f_n \in F[x]$

و $p(x) \in F[x]$ غير قابلة للتحليل $p|\prod_{i=1}^{n} f_i$

فإن

$$\exists r \in [1,2, \ldots, n] : p|f_r$$

5-2-3 :

تعريف :

لتكن $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$

حدودية معرفة على R حلقة

$f(x)$ حدودية بدائية (primative) $\Longleftrightarrow$

$gcd(a_0, a_1, \dots, a_n)=1$ من خلال المعاملات

$C(f(x))=1$ أو $Gcd(f)=1$

6-2-3 :

1.

$f(x)=9x^3+8x^2-3x+2$

حدودية بدائية لأن $gcd(9,8,-3,2)=1$

gcd هي مجموعة ليست عدد

2 إذا كانت

$f(x)=9x^2+6x-3 \in \mathbb{Z}[x]$

$f(x)$ ليست بدائية لأن:

$gcd(9,6,-3)=3$

$f(x)=3(3x^2+2x-1)=3g(x)$

حيث $g(x)$ بدائية.

* حاصل ضرب حدوديتين بدائيتين هو حدودية بدائية دوماً

* إذا كانت $f(x)$ غير قابلة للتحليل على $\mathbb{Z}[x]$ هل هي قابلة للتحليل على $\mathbb{Q}$ ؟

نعم لأن $\mathbb{Q}$ تحوي $\mathbb{Z}$ والعكس أيضاً صحيح

أي إذا كانت غير قابلة للتحليل على $\mathbb{Q}$ فهي غير قابلة للتحليل على $\mathbb{Z}$.

بشرط أن تكون الحدودية معرفة على $\mathbb{Z}$ (أي الأمثال من $\mathbb{Z}$)

وهذا ما يبين المبرهنة التالية.

3-2-6 مبرهنة:

لتكن $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ معرفتان على $\mathbb{Z}[x]$

1- إذا كانت f و g صحيحتين بدائيتين فإن: $h=f.g$ أيضاً صحيحة بدائية.

2- إن $f(x)$ قابلة للتحليل على حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}[x]$

$\Leftrightarrow$ إذا كانت $f(x)$ قابلة للتحليل على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{Q}[x]$ والعكس صحيح

الإثبات:

1- نفرض جدلاً أن $h=\sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$ ليست صحيحة بدائية.

بما أن f و g بدائيتين فإنه يمكن أن نفرض أن a_r هو أول عدد صحيح موجب تحقق:

$p \nmid a_r$ لا تقسم و b_s أول عدد صحيح موجب يحقق $p \nmid b_s$

من أجل أي عدد أولي p

حسب الفرض الجدلي يكون $h(x)$ ليست بدائية فإنه:

$$\forall k \in [0,1,\dots,n+m] \text{ و } \exists p : p \mid a_r$$

$$c_{r+s} = a_0 b_{r+s} + a_r b_{s-1} + \dots + a_{r-1} b_{s+1} + a_r b_s + a_{r+1} b_{s-1} + \dots$$

$$a_r b_s = c_{r+s} - (a_0 b_{r+s} + \dots + a_{r-1} b_{s+1} + a_{r+1} b_{s-1} + \dots + a_{r+s} b_0)$$

مبرهنة إقليدس $\Leftarrow p \mid a_r b_s$

$$p \mid a_r \vee p \mid b_s$$

وهذا تناقض مع الفرض الجدلي فالفرض صحيح

$h(x)$ هي صحيحة بدائية.

$$p \mid a_r \vee p \mid b_s \Leftarrow a_r b_s$$

$\boxed{2}$ $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$

نفرض أن $f(x)$ قابلة للتحليل على $\mathbb{Z}$ أي:

$$\exists h(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x] : f(x) = h(x).g(x)$$

$$0 < \deg(h(x)) < \deg(f(x))$$

$$0 < \deg(g(x)) < \deg(f(x))$$

$$\mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{Q}[x]$$

فيكون f قابلة للتحليل على $\mathbb{Q}$

نفرض أن $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ قابلة للتحليل على $\mathbb{Q}$

نفرض أن $f(x)$ حدودية بدائية (مع المسائل الحدوسية)

بما أن $f(x)$ قابلة للتحليل على $\mathbb{Q}$ فإنه:

$\exists\, h(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ و $f(x) = h(x).g(x)$

بحيث تحقق $0 < \deg(h(x)) < \deg(f(x)) = 2V3$

$$0 < \deg(g(x)) < \deg(f(x)) = 2V3$$

نجد إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لمقامات معاملات كل من الحدوديتين.

$f(x)$ و $g(x)$ عكس التعريف $f(x)$ بالشكل،

ملاحظة: $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}\right)$ $f(x) = $ [illegible]

$$f(x) = \frac{a}{b}\mu(x).y(x)$$

$$\mu(x), y(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

$$\deg(\mu(x)) = \deg(h(x))$$

$$\deg(y(x)) = \deg(g(x))$$

لكي يتم المطلوب يجب أن نثبت أن a, b أعداد صحيحة و $\frac{a}{b} = 1$

$$bf(x) = a\,\mu(x)\,y(x)$$

$$b = a(bf(x)) = a(a\mu(x), ay(x)) = a$$

تذكرة:

إذا كان $\gcd(x.y) = 1$

فإن: $\gcd(ax, ay) = a$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \mu(x).y(x)$$

وهو المطلوب — ومنه حسب تعريف تكون f قابلة للتحليل على $\mathbb{Z}[x]$.