19/4/2015

المحاضرة /2/ عملي

1/ لتكن d دالة مسافة على $X \neq \phi$ أثبت أن (X,d_1) ، (X,d_2) ، (X,d_3) فضاءات مترية حيث :

$$d_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

$$d_2(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$$

$$d_3(x,y)=K\,d(x,y) \qquad (0<K\in\mathbb{R})$$

الحل : (X,d_1)

الشروط 1 و 2 و 3 تتحقق وضوحاً لنبرهن على تحقق متراجحة المثلث ، ليكن $x,y,z\in X$ ، لنثبت أن

$$d_1(x,z)\le d_1(x,y)+d_1(y,z)$$

$$d_1(x,z)=\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}$$

d مسافة تحقق

$$\underbrace{d(x,z)}_{\alpha}\le\underbrace{d(x,y)+d(y,z)}_{\beta}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}\le\frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$$

$$\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}\le\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+\underline{d(y,z)}}+\frac{d(y,z)}{1+\underline{d(x,y)}+d(y,z)}$$

$$\le\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}$$

$$\forall x,y,z\in X\ ,\quad d_1(x,z)\le d_1(x,y)+d_1(y,z)$$

ومنه (X, d_1) فضاء متري

حيث أن

$t \longmapsto \frac{t}{1+t}$ متزايد

$\alpha < \beta$

$\alpha + \alpha\beta < \beta + \alpha\beta$

$\alpha(1+\beta) < \beta(1+\alpha)$

$\frac{\alpha}{(1+\alpha)} < \frac{\beta}{(1+\beta)}$

(X, d_2)

لتكن $x, y, z \in X$

① $d_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \geq 0$

حيث d مسافة تحقق $d(x,y) \geq 0$

② $d_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$

$= \min\{1, d(y,x)\}$

$= d_2(y,x)$

" d مسافة "

$d(x,y) = d(y,x)$

③ $d_2(x,y) = 0 \iff \min\{1, d(x,y)\} = 0$

$\iff d(x,y) = 0 \iff x = y$

أي أن d مسافة على X

④ متراجحة المثلث

لنثبت أن $d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z)$

لنناقش الحالات التالية

$\min\{1, d(x,y)\} =$

$d_2(x,y) \leq d(x,y)$

&

$d_2(x,y) \leq 1$

[1] $\left.\begin{array}{l} d_2(x,y) = d(x,y) \\ d_2(y,z) = d(y,z) \end{array}\right\} \Longrightarrow$

$d_2(x,y) + d_2(y,z) = d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

" d مسافة "

$\geq d_2(x,z)$

[2] $\left.\begin{array}{l} d_2(x,y) = 1 \\ d_2(y,z) = d(y,z) \end{array}\right\} \Longrightarrow$

$$d_2(x,y)+d_2(y,z)=1+d(y,z)\geq 1\geq d_2(x,z)$$

$\boxed{3}$ $d_2(x,y)=d_1(y,z)=1 \Rightarrow$

$$d_2(x,y)+d_2(y,z)=2\geq 1\geq d_2(x,z)$$

$\Leftarrow$ d_2 مسافة على X و (X,d_2) فضاء متري

(X,d_3)

① $d_3\geq 0$, ② $d_3(x,y)=0 \Leftrightarrow$

$$K.d(x,y)=0 \Leftrightarrow$$

$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow$$

$$x=y$$

③ $d_3(x,y)=K.d(x,y)=K\,d(y,x)=d_3(y,x)$

④ $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

$$\Rightarrow K.d(x,z)\leq K.d(x,y)+K\,d(y,z)$$

$$\Rightarrow d_3(x,z)\leq d_3(x,y)+d_3(y,z)$$

ومنه

(X,d_3) فضاء متري .

/2/ إذا كان $X=\mathbb{R}$ معطاة $d(x,y)=|\cos(x-y)|$ حل

(X,d) فضاء متري ؟

$$d(\tfrac{\pi}{2},0)=|\cos(\tfrac{\pi}{2}-0)|=|\cos\tfrac{\pi}{2}|=0$$

مع أن $0\neq\frac{\pi}{2}$

d ليست مسافة على X لعدم تحقق الشرط الثاني من تعريف المسافة

$$x = y \not\Leftrightarrow d(x,y) = 0$$

$$d\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right| = |\cos \pi| = |-1| = 1$$

وأيضاً متراجحة المثلث غير محققة

لو كانت متراجحة المثلث محققة فإن

$$1 = d\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \le d\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) + d\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$\Leftarrow$ d لا تحقق متراجحة المثلث لذلك d ليست مسافة على X و (X,d) ليس فضاء متري.

/3/ $X = \mathbb{R}^n$, $1 < n$

$$d(x,y) = \min_{1 \le i \le n} \{|x_i - y_i|\} \qquad (x = x_1, \dots, x_n) \quad (y = y_1, \dots, y_n)$$

هل d مسافة؟

d ليست مسافة على X لأن

$$\left.\begin{aligned} x &= (1,2,3,\dots,n) \\ y &= (1,-2,-3,\dots,-n) \end{aligned}\right\} \in \mathbb{R}^n$$

$\neq$ غير متساويين

$$d(x,y) = \min\{0, 4, 6, \dots, 2n\} = 0$$

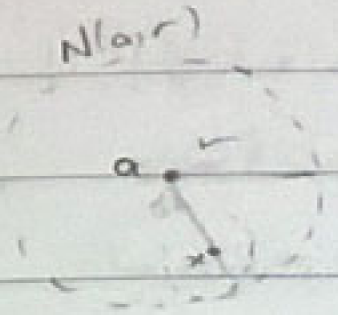
مع أن $x \neq y$

وبالتالي d ليست مسافة على X لعدم تحقق الشرط الثاني.

/4/ أثبت أن كل كرة مفتوحة في فضاء متري مجموعة مفتوحة.

لتكن (X,d) فضاء متري ولتكن $a \in X$ ولتكن $r > 0$ عدداً حقيقياً

ولنظهر $N(a,r)$ كرة مفتوحة في X



لنأخذ $x \in N(a,r)$

عندئذ

$$d(x,a) < r \Rightarrow$$
$$r - d(x,a) > 0$$

نختار $\varepsilon = r - d(x,a)$

لنثبت أن

$$N(x,\varepsilon) \subseteq N(a,x)$$

$$\forall y \in N(x,\varepsilon) : d(y,x) < \varepsilon = r - d(x,a)$$
$$\Rightarrow d(y,x) + d(x,a) < r$$
$$\Rightarrow d(y,a) < r$$

" d مسافة على X تحقق متراجحة المثلث "

$$\Rightarrow y \in N(a,r)$$

$$\forall x \in N(a,r) : \exists \varepsilon > 0 : N(x,\varepsilon) \subseteq N(a,r) \Leftarrow$$

ومنه $N(a,r)$ مجموعة مفتوحة في X

لتكن X مجموعة غير منتهية

$\boxed{\text{أو } O}$

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq X : X \overset{\text{فرق}}{\setminus} O \text{ منتهية}\}$$

أثبت أن τ توبولوجيا على X

① $\emptyset \in \tau$

$X \in \tau$ (لأن $X \setminus X = \emptyset$ وهي منتهية)

② $O_1, O_2 \in \tau \Rightarrow X \setminus O_1$

$\neq \emptyset \quad \neq \emptyset \qquad X \setminus O_2$ منتهيتين

$$\underbrace{(X\setminus O_1)\cup(X\setminus O_2)}_{\text{مغلقة}} = \underbrace{X\setminus(O_1\cap O_2)}_{\text{مغلق}}$$

$$Z\in O_1\cap O_2 \quad \Leftarrow$$

③ $\{O_i : i\in I\}\subseteq Z$

$$\underbrace{X\setminus\Big(\bigcup_{i\in I} O_i\Big)}_{\text{مغلقة}} = \bigcap_{i\in I}(X\setminus O_i)$$

$$\subseteq X\setminus O_{i_0} \quad (\text{مغلق}) \qquad i_0\in I$$

مغلق طبولوجيا على X

كل فضاء متري هو فضاء طبولوجي

للأسبوع القادم:

1. أثبت أن (X,Z) لا يمكن أن تكون فضاء متري
2. لتكن $X=\mathbb{R}$

$Z=\{\phi,\mathbb{R}\}\cup\{]q,+\infty[\,,\ q\in\mathbb{Q}\}$

أثبت أن Z ليست طبولوجيا على $\mathbb{R}$

3. ارسم الكرات المفتوحة: نصف القطر

في $(N(\underbrace{0,0}_{\text{المركز}}),1)$

المسافة الإقليدية $(\mathbb{R}^2,d) \Rightarrow d(x,y)=\sqrt{\ }$

$(\mathbb{R}^2,d_1)\Rightarrow d_1(x,y)=\sum|\ \ |$

$(\mathbb{R}^2,d_\infty)\Rightarrow d_\infty(x,y)=\max$

الرجى.