# المحاضرة السادسة

تعريف : لتكن $(L,\vee,\wedge)$ و $(L',\vee,\wedge)$ شبكتين و $G : L \to L'$
نقول ان $G$ تشاكل شبكي اذا وفقط اذا تحقق :

$$a,b \in L : \quad G(a\vee b) = G(a) \vee G(b)$$
$$G(a\wedge b) = G(a) \wedge G(b)$$

- اذا كان $G$ متباين فاننا نقول ان $G$ تطبيق غمس الشبكة $L$ في الشبكة $L'$
- اذا كان $G$ تشاكل شبكي تقابل فانه يسمى تماثلا شبكياً .
- نقول عن التشاكل الشبكي $G$ انه تماثل مخالف اذا كان $G$ تماثلاً ويحقق الشرط :

$$a,b \in L : \quad a \le b \Rightarrow G(b) \le G(a)$$

* اذا يمكن ان نقول ان التشاكل الشبكي هو تشاكل بين جبريين شامليين .

مبرهنة : اذا كان $G : L \to L'$ تطبيق غمس للشبكة $L$ في $L'$ [تشاكل متباين]
فان $G$ يكون تطبيق غمس لـ $L$ في $L'$ كمجموعتين مرتبتين

الاثبات :
بما ان $G$ تشاكل شبكي وغمس لـ $L$ في $L'$ فيكون $G$ متباين وبالتالي خاصة الغمس لمجموعات محققة .
بقي اثبات ان $G$ تطبيق : اي يجب ان نبرهن :

$$x,y \in L : \quad x \le y \Leftrightarrow G(x) \le G(y)$$
$$G(x) = G(x)\wedge G(y) \Leftrightarrow G(x) \le G(y)$$
$$x \le y \Leftrightarrow x = x\wedge y \Leftrightarrow G(x) = G(x\wedge y) \Leftrightarrow$$ $G$ تشاكل

عكس هذه المبرهنة : اذا كان يوجد تطبيق متباين بين مجموعتين مرتبتين . هل هذا يقتضي انه تطبيق غمس لشبكات معرفة كبنية جبرية .
. ليس صحيح .

مثال : اذا كانت $L = (\mathbb{N}^*, \le)$ شبكة ولتكن لدينا علاقة الترتيب معرفة بالشكل

$$x,y \in L : \quad x \le y \Leftrightarrow x \mid y$$

ولتكن لدينا $L' = (S(M), \subseteq)$ مجموعة كل اجزاء $M$ مرتبة وفقة علاقة الاحتواء وهي ايضاً شبكة .
لنعرف $G : L \to L'$

قواسم الـ $x$
$$x \in L : G(x) = D_x = \{ y \in \mathbb{N} : y \mid x \}$$

ان $G$ هو تطبيق غمس للشبكة $L$ في $L'$ كمجموعات مرتبة .
متباين لان $L \subseteq L'$ كل عنصر قاسم لنفسه .

لنثبت انه ليس تشاكل شبكي : مثال معاكس:

$2,3 \in L \quad : \quad G(2) = \{1,2\} \quad , \quad G(3) = \{1,3\}$

$\text{Lcm}\{x,y\} \longleftarrow \quad G(2 \vee 3) = G(6) = \{1,2,3,6\}$

ليس تشاكل شبكي $\Longleftarrow \quad G(2) \vee G(3) \neq G(2 \vee 3)$

اذاً هو ليس تطبيق عن تشبكات .

**مثال:** اذا كانت $G$ زمرة و $L = (N(G), \subseteq)$ ، $N(G)$ مجموعة الزمر الجزئية الناظمية لـ $G$

و $L' = (S(G), \subseteq)$

وعرفنا $G : L \longrightarrow L'$

المطابقة $a \in L : G(a) = a$

⊙ $G$ تطبيق متباين لمجموعات مرتبة (تباين قانوني) .

⊙ $G$ ليس تشاكل شبكي : لأن اجتماع اي زمرتين جزئيتين ليس بالضرورة ان يكون زمرة جزئية .

$A, B \in L : \quad G(A) \vee G(B) = G(A) \cup G(B) = A \cup B$

$G(A \vee B) = \langle A \cup B \rangle$

$\Longrightarrow \quad G(A \vee B) \neq G(A) \vee G(B) \Longrightarrow$ $G$ ليس تشاكل شبكي .

**تعريف** : لتكن $(L, \leqslant)$ و $(L', \leqslant)$ مجموعتين مرتبتين نقول ان التطبيق $G : L \longrightarrow L'$ رتيب اذا وفقط اذا حقق :

$a, b \in L \quad : \quad a \leqslant b \Longrightarrow G(a) \leqslant G(b)$

**مثال:** لتكن $L = (\{0, x, y, 1\}, \leqslant)$ ، $0 \leqslant x \leqslant 1$ و $0 \leqslant y \leqslant 1$

و $x$ و $y$ غير مقترنين وفق $\leqslant$ . (( اي ان هذه المجموعة مرتبة جزئياً )) .

ولدينا $L' = (\{0, Z, 1\}, \leqslant)$ و $0 \leqslant Z \leqslant 1$

ولنعرف $G : L \longrightarrow L'$ وفق مايلي : (سنعرفه عند كل عنصر لان المجموعة منتهية) .

$G(0) = 0 \quad , \quad G(1) = 1 \quad , \quad G(x) = G(y) = Z$

• لنثبت ان هذا التطبيق رتيب :

$0 \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow \quad G(0) = 0 \leqslant G(x) = Z \leqslant 1 = G(1)$

$0 \leqslant y \leqslant 1 \Longrightarrow \quad G(0) = 0 \leqslant Z = G(y) \leqslant 1 = G(1)$

وبالتالي $G$ رتيب .

• هل $\varphi$ تشاكل: نلاحظ انه ليس تشاكل شبكي لأن:

* لدينا حسب تعريف اصغر حد اعلى . $x \vee y = \sup\{x,y\} = 1$

هو sup لأن { لو لاحظنا المجموعة يوجد حد اعلى واحد . $1 \geq x$ و $1 \geq y$ ومنه الحد الاعلى ولا يوجد غيره اذن هو اصغر حد اعلى .

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(1) = 1$$

$$\varphi(x) \vee \varphi(y) = Z \vee Z = Z \quad \text{خاصية اللانمو}$$

$\varphi(x \vee y) \neq \varphi(x) \vee \varphi(y)$ .
اذن $\varphi$ ليس تشاكل شبكي

مبرهنة: لتكن $L$ و $L'$ شبكتين. ان كل تماثل بين $L$ و $L'$ كمجموعات مرتبة هو تماثل بين $L$ و $L'$ كشبكات . (تماثل شبكي) .

« هذا يعني ان عكس المبرهنة السابقة يتحقق في شرط ان يكون التشاكل غامر (تماثل) » .

الاثبات:

ليكن $\varphi: L \to L'$ تماثل بين $L$ و $L'$ كمجموعات مرتبة : وبما انه تماثل فهو تقابل (متباين وغامر) .

لإثبات المطلوب يجب ان نثبت ان $\varphi$ تشاكل شبكي :

$a, b \in L$ : $a \leq a \vee b \implies \varphi(a) \leq \varphi(a \vee b)$

$b \leq a \vee b \implies \varphi(b) \leq \varphi(a \vee b)$

هذا الكلام صحيح لان المجموعات مرتبة (طبيعة ترتيبة مرتبة)

ومنه $\varphi(a \vee b)$ هو حد اعلى للمجموعة $\{\varphi(a), \varphi(b)\}$ .

لنثبت ان $\varphi(a \vee b)$ اصغر حد اعلى كالتالي :

ليكن $t$ حد اعلى للمجموعة $\{\varphi(a), \varphi(b)\}$ وهذا يعني ان $\varphi(a) \leq t$ & $\varphi(b) \leq t$

لدينا $t \in L'$ و $\varphi$ غامر وبالتالي يوجد $s \in L$ بحيث

$$\varphi(s) = t$$

$$\implies \left.\begin{array}{l} \varphi(a) \leq \varphi(s) \\ \varphi(b) \leq \varphi(s) \end{array}\right\} \implies \varphi(a) \vee \varphi(b) \leq \varphi(s) = t$$

وبما ان $\varphi$ متباين فان :

$$a \leq s \quad \& \quad b \leq s$$

$$\implies a \vee b \leq s$$

$$\implies \varphi(a \vee b) \leq \varphi(s) = t$$

وبالتالي $\varphi(a \vee b)$ هو اصغر حد اعلى اي :

★.... $\varphi(a) \vee \varphi(b) = \varphi(a \vee b) \underset{\text{حسب تعريف sup}}{=} \sup\{\varphi(a), \varphi(b)\}$

$$\left.\begin{aligned} a\wedge b &\leq a \\ a\wedge b &\leq b \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} G(a\wedge b) &\leq G(a) \\ G(a\wedge b) &\leq G(b) \end{aligned}$$

وبالتالي $G(a\wedge b)$ هو حد أدنى للمجموعة $\{G(a), G(b)\}$

لنثبت أن $G(a\wedge b)$ هو أكبر حد أدنى : «inf»

لنفرض أن $t$ حد أدنى للمجموعة $\{G(a), G(b)\}$ :

لدينا $t \in L'$ و $G$ غامر وبالتالي :

$$\exists\, s \in L \;:\; G(s) = t$$

$$\left.\begin{aligned} t \leq G(a) &\Longrightarrow G(s) \leq G(a) \\ t \leq G(b) &\Longrightarrow G(s) \leq G(b) \end{aligned}\right\} \xRightarrow{G \text{ تباينية}} \begin{aligned} s &\leq a \\ s &\leq b \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow s \leq a\wedge b \xRightarrow[\text{بأخذ } G \text{ للطرفين}]{} t = G(s) \leq G(a\wedge b)$$

ومنه $G(a\wedge b)$ أكبر حد أدنى للمجموعة $\{G(a), G(b)\}$

$$G(a\wedge b) = \inf\{G(a), G(b)\} \underset{\text{حسب تعريف inf}}{=} G(a)\wedge G(b) \quad \ldots *'$$

من $*$ و $*'$ نجد أن $G$ تشاكل شبكي .

**تمرين :**

لتكن $(L,\wedge,\vee)$ شبكة و $a,b,c \in L$ [1] و [2] متكافئتين :

[1] $a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ (شرط الشبكة التوزيعية)

[2] $a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$

*Finished Lecture ...*