تعريف:

بفرض $f,g \in K[x_1,\dots,x_n]$ كثيرتي حدود غير صفريتين ولنضع:

$$L = Lcm(Lp(f), Lp(g))$$

المضاعف المشترك الأصغر لـ $Lp(f), Lp(g)$ عندئذٍ:

$$S(f,g) = \frac{L}{Lt(f)} f - \frac{L}{Lt(g)} g$$

مبرهنة:

بفرض $G=\{g_1,\dots,g_t\}$ كثيرات حدود غير صفرية من $K[x_1,\dots,x_n]$ عندئذٍ تكون G قاعدة غروبنر للمثالي $I=\langle g_1,\dots,g_t\rangle$ إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall i,j \in \{1,\dots,t\} \; ; \; i \neq j : S(g_i,g_j) \xrightarrow{G} 0$$

تمرين: بفرض $f_1 = yx-y$ ، $f_2 = y^2-x \in \mathbb{R}[x,y]$ عندئذٍ من أجل $y>x$ lex

أوجد قاعدة غروبنر للمثالي I المولد بـ f_1, f_2 - $I=\langle f_1,f_2\rangle$

الحل: نضع $G:=\{f_1,f_2\}$ (أول خطوة نرتب f_1, f_2 حسب قاعدة الترتيب ولكنه هنا مرتبين).

نلاحظ أن: $Lp(f_1) = yx$, $Lp(f_2) = y^2$

$$L = Lcm(Lp(f_1), Lp(f_2)) = y^2x$$

$$S(f_1,f_2) = \frac{L}{Lt(f_1)} f_1 - \frac{L}{Lt(f_2)} f_2 = \frac{y^2x}{yx}(yx-y) - \frac{y^2x}{y^2}(y^2-x)$$

$$= y^2x - y^2 - y^2x + x^2 = -y^2 + x^2$$

$$\begin{array}{r|l} & -1 \\ \hline y^2-x & -y^2+x^2 \\ & \underline{-y^2+x} \\ & x^2-x \end{array}$$

نقسم $S(f_1,f_2)$ على f_2

(لأنه يقبل القسمة على f_2)

$$S(f_1, f_2) \longrightarrow x^2 - x$$

ومنه :

نضع

$$G := \{ f_1, f_2, f_3 \}$$

$L = Lcm(LP(f_1), LP(f_3)) = Lcm(yx, x^2) = yx^2$

$$S(f_1, f_3) = \frac{yx^2}{yx}(yx - y) - \frac{yx^2}{x^2}(x^2 - x)$$

$$= \cancel{yx^2} - yx - \cancel{yx^2} + yx = 0$$

$$S(f_2, f_3) = \frac{y^2x^2}{y^2}(y^2 - x) - \frac{y^2x^2}{x^2}(x^2 - x)$$

$$= \cancel{y^2x^2} - x^3 - \cancel{y^2x^2} + y^2x = y^2x^2 - x^3$$

ملاحظة:

S هدفها تقليل الدرجة لذلك يجب أن يكون دوماً هناك اختصار أحد حدود g مع $\frac{L}{Lt(g)}$

لنقسم على f_1 :

$$\begin{array}{r|l} & y \\ \hline yx - y & y^2x - x^3 \\ & y^2x - y^2 \\ \hline & y^2 - x^3 \end{array}$$

نقسم الناتج على f_2

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline y^2 - x & y^2 - x^3 \\ & y^2 - x \\ \hline & -x^3 + x \end{array}$$

نقسم الناتج على f_3 :

ملاحظة

بناء قاعدة غروبنر سؤال امتحاني هام ونهائي

$$\begin{array}{r|l} x^2-x & -x^3+x \\ \hline -x-1 & -x^3+x^2 \\ & \overline{-x^2+x} \\ & -x^2+x \\ & \overline{0} \end{array}$$

$S(f_2, f_3) \longrightarrow 0$ ومنه

ومنه:

$G=\{f_1, f_2, f_3\}$ تشكل قاعدة غروبنر للمثالي $I=\langle f_1, f_2\rangle$

تعريف: نفرض $G=\{g_1, \dots g_t\}$ قاعدة غروبنر للمثالي I من $K[x_1, \dots x_n]$ عندئذٍ نقول عن G أنها قاعدة غروبنر أصغرية لـ I إذا تحققت الشروط التالية:

1) $\forall i \in \{1, \dots t\} : Lc(g_i) = 1$

2) $\forall i, j \in \{1, \dots t\}$; $i \neq j$

$Lp(g_i)$ لا يقبل القسمة على $Lp(g_j)$.

مثال: قاعدة غروبنر التي حصلنا عليها في المثال السابق: أصغرية (تحقق الشروط)

مبرهنة:

نفرض $G=\{g_1, \dots g_t\}$ قاعدة غروبنر للمثالي I من $K[x_1, \dots x_n]$ عندئذٍ من أجل $i, j \in \{1, \dots t\}$ حيث $i \neq j$ إذا كان:

$Lp(g_i)$ يقبل القسمة على $Lp(g_j)$ فإن القاعدة $G'=G-\{g_i\}$ تكون قاعدة غروبنر للمثالي I.

$\boxed{\text{ومنه:}}$ حتى نحصل على قاعدة غروبنر أصغرية من القاعدة $G=\{g_1, \dots g_t\}$:

1- نقوم بتقسيم g_i على $Lc(g_i)$ ثم 2- نحذف كل g_i بحيث $Lp(g_i)$ يقبل القسمة على $Lp(g_j)$ بحيث $i \neq j$.

مبرهنة:

بفرض $G=\{g_1,\dots,g_t\}$ ، $G'=\{g'_1,\dots,g'_s\}$ قاعدتا غروبنر أصغريتان للمثالي I من $K[x_1,\dots,x_n]$ عندئذٍ يكون: $s=t$ و $Lt(g_i)=Lt(g'_i)$

تعريف:

بفرض $G=\{g_1,\dots,g_t\}$ قاعدة غروبنر أصغرية للمثالي I من $K[x_1,\dots,x_n]$ عندئذٍ نقول عن G أنها قاعدة غروبنر المختصرة للمثالي I إذا كان كل g_i تنتج عن $G-\{g_i\}$:

ومنه:

إذا كانت $G=\{g_1,\dots,g_t\}$ قاعدة غروبنر أصغرية نضع:

$$g_1 \xrightarrow{H_1} h_1 \qquad H_1=\{g_2,\dots,g_t\}$$

$$g_2 \xrightarrow{H_2} h_2 \qquad H_2=\{g_1,g_3,\dots,g_t\}$$

$$\vdots$$

$$g_t \xrightarrow{H_t} h_t \qquad H_t=\{g_1,\dots,g_{t-1}\}$$

عندئذٍ تكون

$H=\{h_1,\dots,h_t\}$ قاعدة غروبنر المختصرة للمثالي I.

مبرهنة:

نثبت علاقة ترتيب على الحدوديات عندئذٍ لكل مثالي غير صفري قاعدة غروبنر مختصرة وحيدة بالنسبة لعلاقة الترتيب المفروضة.

تمرين:

$f_1=xy-y,\ f_2=y^2-x \in \mathbb{R}[x,y]$

أوجد قاعدة غروبنر المختصرة للمثالي $I=\langle f_1,f_2\rangle$

من أجل

$\underset{glex}{x>y}$ و $\underset{lex}{x>y}$

حل : $\boxed{1}$ ،

من أجل : $x \underset{lex}{>} y$:

$\boxed{f = xy - y}$ $\boxed{f_2 = -x + y^2}$

نضع : $G := \{f_1, f_2\}$

$$S(f_1, f_2) = \frac{xy}{xy}(xy - y) - \frac{xy}{-x}(-x + y^2)$$

$$\underbrace{}_{f_1 + y f_2}$$

$$= y^3 - y \overset{G}{\not\longrightarrow} 0$$

نضع $\boxed{f_3 = y^3 - y}$

$$S(f_1, f_3) = \frac{xy^3}{xy} f_1 - \frac{xy^3}{y^3} f_3 = y^2 f_1 - x f_3$$

$$= y^2(xy - y) - x(y^3 - y) = xy - y^3$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline xy - y & xy - y^3 \\ & \underline{xy - y} \\ & -y^3 + y \end{array}$$

ومنه

$$S(f_1, f_3) \overset{G}{\longrightarrow} 0$$

$$S(f_2, f_3) = \frac{xy^3}{-x} f_2 - \frac{xy^3}{y^3} f_3 = -y^3 f_2 - x f_3$$

$$= xy - y^5$$

خطوات الحل:

1) نرتب f_1 و f_2 حسب قاعدة الترتيب المعطاة

2) نضع G ونوجد $S(f_1, f_2)$ ثم نتابع بخطوات الحل

⋮

حتى 3) نوجد غروبنر

التقسيم مع الأمثلة

4) نحول للأصغرية بحذف g_1 التي تقبل القسمة على غيره

5) نوجد المختصرة (وهي وحيدة)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
\hline
xy - y & xy - y^5 \\
 & xy - y \\
\hline
 & -y^5 + y
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & -y^2 - 1 \\
\hline
y^3 - y & -y^5 + y \\
 & -y^5 + y^3 \\
\hline
 & -y^3 + y \\
 & -y^3 + y \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

ومنه: $G = \{f_1, f_2, f_3\}$

قاعدة غروبنر

ولكنها ليست أصغرية.

G الناتجة ليست أصغرية حيث نلاحظ أن $Lp(f_2)$ يقبل القسمة على $Lp(f_1)$ لذلك نحذف f_1، وكذلك نقسم f_2 على -1 فنجد

$$G = \{\overbrace{x - y^2}^{g_1}, \overbrace{y^3 - y}^{g_2}\}$$

قاعدة غروبنر أصغرية للمثالي I.

لنوجد المختصرة:

نلاحظ أن:

$$g_1 \xrightarrow{g_2} g_1$$

$$g_2 \xrightarrow{g_1} g_2$$

ومنه

$$G = \{g_1, g_2\}$$

هي قاعدة غروبنر المختصرة للمثالي I.

$\boxed{2}$ من أجل $\underset{glex}{x>y}$ بترتيب: $f_2 = y^2-x$ $\quad f_1 = xy-y$

نضع: $G:=\{f_1,f_2\}$.

$$S(f_1,f_2) = \frac{xy^2}{xy}f_1 - \frac{xy^2}{y^2}f_2 = yf_1 - xf_2$$
$$= x^2-y^2 \xrightarrow{G} x^2-x \neq 0$$

نضع: $G:=\{f_1,f_2,f_3\}$

حيث: $\boxed{f_3 = x^2-x}$

بالمثل نجد أنه:

$$S(f_1,f_2) = 0$$
$$S(f_2,f_3) = -x^3+xy \xrightarrow{G} 0$$

ومنه:

$$G = \{\overbrace{xy-y}^{g_1}, \overbrace{y^2-x}^{g_2}, \overbrace{x^2-x}^{g_3}\}$$

قاعدة غروبنر أصغرية للمثالي I.

لنوجد المختصرة: نلاحظ أنه

$$g_1 \xrightarrow{\{g_2,g_3\}} g_1 \qquad g_2 \xrightarrow{\{g_1,g_3\}} g_2 \quad , \quad g_3 \xrightarrow{\{g_1,g_2\}} g_3$$

ومنه

فإن $G=\{g_1,g_2,g_3\}$ هي قاعدة غروبنر المختصرة.

وهو المطلوب.

وظيفة:

نفرض: $f_1 = 2x-y^2$, $f_2 = x^2+y^2-1 \in Q[x,y]$

أوجد قاعدة غروبنر المختصرة للمثالي:

$$I = \langle f_1, f_2 \rangle$$

من أجل: $\underset{lex}{x>y}$ ثم $\underset{gl}{x>y}$

انتهت المحاضرة السادسة