الثلاثاء (من ٩ ← ١٠/ ١٢ ← ٢) المحاضرة الحادية عشر 21/ 4/ 2015

تمرين: أوجد نشر ماك لوران لكل فرع من فروع التابع

$f(z) = (1+z)^{\alpha}$ ؛ α ثابت عقدي

الحل

$(1+z)^{\alpha} = e^{\alpha \ln(1+z)}$

$= e^{\alpha(\ln|1+z| + i(Arg(1+z) + 2\pi k))}$; $k \in \mathbb{Z}$, $-\pi < Arg(1+z) < \pi$

$= e^{\alpha Ln(1+z)} \cdot e^{2\pi \alpha k i} = \underbrace{e^{\alpha Ln(1+z)}}_{\text{تابع وحيد القيمة}} \cdot (e^{2\pi k i})^{\alpha}$

$= e^{\alpha Ln(1+z)} \cdot \underbrace{(1)^{\alpha}}_{\text{متعدد القيم}}$

أمثلة: $\alpha = \frac{1}{2}$ له جذران

$\alpha = \frac{1}{3}$ له ثلاثة جذور

عندما α عدد عادي ⇐ ينتج تابع منتهي الفروع (عددها = مقام الألفا)

α غير عادي ⇐ له عدد غير منتهٍ من الفروع

إيجاد الجذور (لنفرض أن $\alpha = \frac{1}{n} \neq 0$) ⇐ $\left[\sqrt[n]{a} = |a|^{\frac{1}{n}} cis\left(\frac{Arg\, 2\pi k}{n}\right) ; k = 0, \dots, n-1\right]$

ليكن L_k الفرع للتابع $f(z) = (1+z)^{\alpha}$ الموافق لـ k (مثبت k)

عندئذٍ L_k تحليلي على $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$

$L_k'(z) = 1^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{1+z} e^{\alpha Ln(1+z)}$ $\qquad L_k(0) = 1^{\alpha} \cdot e^{\alpha Ln(1)} = 1^{\alpha}$

$L_k'(0) = 1^{\alpha} \frac{\alpha}{1+0} e^{\alpha Ln(1)} = 1^{\alpha} \cdot \alpha = 1^{\alpha} \cdot (\alpha - 1 + 1)$

$L_k''(0) = 1^{\alpha} \left(\frac{-\alpha}{(1+z)^2} e^{\alpha Ln(1+z)} + \left(\frac{\alpha}{1+z}\right)^2 e^{\alpha Ln(1)} \right)$

$L_k^{(n)}(z) = 1^{\alpha} (\alpha - n + 1)$

$L_k(z) = 1^{\alpha} \left(1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots\right)$

قيمة 1^{α} الموافقة لـ K

حيث النشر صحيح على $D(0,1)$

لو كانت $\alpha \in \mathbb{N}$ فينتج تابع ليس متعدد الفروع وإنما تابع كثير حدود فإنه صحيح أيضاً على $D(\bar{0},1)$

تمرين: انشر التابع $f(z)=\frac{2z}{(z-1)^2(z-i)}$ وفق مال لوران.

$$\frac{2z}{(z-1)^2(z-i)}=\frac{A}{z-i}+\frac{B}{(z-1)}+\frac{C}{(z-1)^2}$$

$$A=\frac{2i}{(i-1)^2}=\frac{2i}{-1+1-2i}=-1$$

$$C=\frac{2}{1-i}$$

لحساب B نضرب الطرفين بـ z ونجعل $z\to\infty$

$$0=A+B=0 \implies B=-A=1$$

$$\implies f(z)=-\frac{1}{z-i}+\frac{2}{1-i}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)}$$

ننشر تابع تابع وفق مال لوران.

$$-\frac{1}{z-i}=\frac{1}{i}\frac{1}{1-\left(\frac{z}{i}\right)}=\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^{n+1}};\ z\in D(0,1)$$

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

$$\frac{1}{(z-1)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(z^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$$

نعوض في التابع

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{2}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i^{n+1}}+\frac{2}{1-i}(n+1)-1\right)z^n$$

النشر صحيح في $D(0,1)$

يكون التابع غير تحليلي عند نقطة إذا اختل أحد الشروط:
- إذا كان غير معرف عندها
- غير مستمر عندها
- إذا كان غير قابل للاشتقاق عندها
- إذا كان غير قابل للاشتقاق بجوارها

النقاط الشاذة لتابع عقدي:

نقول عن نقطة z_0 إنها شاذة لتابع f إذا لم يكن f تحليلياً عندها.

مثال: إن التابع $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ له نقطتان شاذتان هما $z = i$, $z = -i$ وهما وحيدتان لأن التابع غير معرف عندهما فهو غير تحليلي على $\mathbb{C}$.

مثال: $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ له نقطة شاذة وحيدة وهي $z = 0$

لأن: التابع $g(z) = \frac{1}{z}$ له نقطة شاذة وهي $z = 0$ فهو تحليلي على $\mathbb{C}^*$

والتابع $h(k) = \sin k$ ليس له نقاط شاذة وهو تحليلي على $\mathbb{C}$

فالتركيب $f = g \circ h = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ هو تحليلي على $\mathbb{C}^*$

مثال: $f(z) = |z|^2$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 + i\,(0)$$

$$u(x,y) = x^2 + y^2 \quad , \quad v(x,y) = 0$$

يكون تحليلي عندما تتحقق معادلتي كوشي ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

فقط محققة عندما $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

فقط محققة عندما $y = 0$

من حلول المعادلتين ينتج أنه محققتان فقط عندما $z = 0 + 0i = 0$

$\Leftarrow$ التابع f يقبل الاشتقاق فقط عند $z = 0$ ولكنه غير تحليلي عند أي نقطة لأنه غير قابل للاشتقاق بجوار أي نقطة في $\mathbb{C}$ أي كل نقاط المستوي العقدي هي نقاط شاذة

النقطة الشاذة

لها نوعان:

1) نقطة شاذة معزولة.

نقول عن نقطة شاذة z_0 لتابع f أنها معزولة إذا وجد لها جوار (قرص مفتوح مركزه z_0) لا يحوي أي نقطة شاذة أخرى لـ f غيرها.

أي يوجد عدد حقيقي موجب (أكبر تماماً من الصفر) r بحيث يكون التابع f تحليلي على الحلقة $ann(z_0, 0, r)$

كان يرمز لها الدكتور سامي بالرمز $R(z_0, 0, r)$

مثال: النقطتان $z = i ,\ z = -i$ هما شاذتان ومعزولتان للتابع $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$

ملاحظة: إذا كان لتابع عقدي f عدد منته من النقاط الشاذة فإن جميع هذه النقاط ستكون نقاط شاذة معزولة.

لكن هذا لا يعني أنه إذا كان لتابع عدد غير منته من النقاط الشاذة أن هذه النقاط تكون غير معزولة؛

أي قد يوجد لتابع عقدي عدد غير منته من النقاط الشاذة وجميعها تكون معزولة

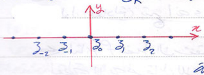
مثال: $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ كل من البسط والمقام تحليلي على $\mathbb{C}$

لكن f تحليلي على $\mathbb{C}$ عدا القيم التي تعدم المقام

أي أن النقاط الشاذة لـ f هي حلول المعادلة $\sin z = 0$

وكما مر معنا سابقاً ($\sin z = 0 \Leftrightarrow z_k = \pi k ; k \in \mathbb{Z}$)

لكن جميع هذه النقاط معزولة.



ولنثبت أن z_k معزولة، نأخذ القرص $D(z_k, \pi)$ هذا القرص لن يحوي أي نقطة شاذة للتابع غير z_k فهي شاذة معزولة $\forall k \in \mathbb{Z}$

انتهت المحاضرة الحادية عشر