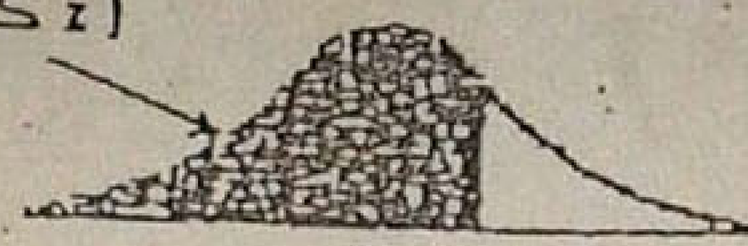
المحاضرة السادسة ٢٤/٣/٢٠١٥

ملاحظة: فيما يلي من المسائل سوف نلجأ في الحسابات إلى جدول التوزيع الطبيعي التالي

جدول التوزيع الطبيعي المعياري المتجمع

$\Phi(z) = P(Z \le z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997

تمرين أوجد قيمة كل من الاحتمالات وذلك من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

$\boxed{1}$ $p(Z \leq 1.35)$ ثم أوجد $p(Z \geq 1.35)$

$\boxed{2}$ $p(Z \geq -1.85)$ ثم أوجد $p(Z \leq 1.85)$

$\boxed{3}$ أوجد Z_α التي تحقق $p(Z \leq Z_\alpha) = 0.975$

<u>الحل</u>

$\boxed{1}$ $p(Z \leq 1.35) = \phi(1.35) = 0.9115$

$p(Z \geq 1.35) = 1 - p(Z \leq 1.35) = 1 - 0.9115$

$p(Z \geq 1.35) = 0.0885$

$\boxed{2}$ $p(Z \geq -1.85) = 1 - p(Z \leq -1.85) = 1 - \phi(-1.85)$

ونعلم أنَّ $\phi(-Z) = 1 - \phi(Z)$ ومنه

$$p(Z \geq -1.85) = 1 - (1 - \phi(1.85))$$
$$= \phi(1.85) = 0.9678$$
$$p(Z \leq 1.85) = \phi(1.85) = 0.9678$$

$\boxed{3}$ نلاحظ من الجدول أنَّ $Z_\alpha = 1.96$

طلب $\boxed{4}$ أوجد $p(-1.72 \leq Z \leq 1.80)$

$$p(-1.72 \leq Z \leq 1.80) = p(Z \leq 1.80) - p(Z \leq -1.72)$$
$$p(-1.72 \leq Z \leq 1.80) = \phi(1.80) - \phi(-1.72)$$
$$= 0.9641 - [1 - \phi(1.72)]$$
$$= 0.9641 - 1 + 0.9573 = 0.9214$$

تمرين: بفرض $X \sim N(5,4)$ أوجد $p(X < 8)$

<u>الحل</u>: نعلم أنَّ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ومنه:

$$E(X) = \mu = 5 \quad , \quad \sigma^2 = 4 \Rightarrow \sigma = 2$$

وبالتالي:

$$p(X < 8) = p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{8-\mu}{\sigma}\right)$$
$$p(X < 8) = p\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} \leq \frac{8-5}{2}\Big) =$$
$$p(X < 8) = p\left(Z \leq \frac{3}{2}\right) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

(توزيع مستمر $p(X<x) = p(X \leq x)$) $\quad = \phi\left(\frac{3}{2}\right) = \phi(1.5) = 0.9332$

تمرين: إذا كان $X \sim N(50,25)$ فأوجد ما يلي

$$p(X > 62) \;،\; p(|X-50| \le 80) \;،\; p(|X-40| > 5)$$

الحل بما أن $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن:

① $\mu = 50 \;،\; \sigma^2 = 25 \Rightarrow \sigma = \sqrt{25} = 5$

وبالتالي:

$$p(X>62) = 1 - p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{62-\mu}{\sigma}\right) = 1 - p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{62-50}{5}\right)$$

من أجل المعايرة نضع $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ نجد

$$p(X>62) = 1 - p\left(Z \le \frac{12}{5}\right) = 1 - p(Z \le 2.4)$$

$$= 1 - \phi(2.4) = 1 - 0.9918 \quad \boxed{\text{توزيع طبيعي } Z \sim N(0,1)}$$

$$\Longrightarrow p(X>62) = 0.0082$$

② $p(|X-50| \le 80) = p(-8 \le X-50 \le 8)$

$$p(|X-50| \le 80) = p(X-50 \le 8) - p(X-50 \le -8)$$

$$p(|X-50| \le 80) = p\left(\frac{X-50}{\sigma} \le \frac{8}{\sigma}\right) - p\left(\frac{X-50}{\sigma} \le \frac{-8}{\sigma}\right)$$

$p(|X-50| \le 80)$ للمعايرة نضع $Z = \frac{X-50}{\sigma}$ نجد

$$= p\left(Z \le \frac{8}{5}\right) - p\left(Z \le -\frac{8}{5}\right)$$

$= p$ بحيث $Z \sim N(0,1)$ وبالتالي:

$$p(|X-50| \le 80) = \phi(1.6) - \phi(-1.6)$$

$$= \phi(1.6) - [1 - \phi(1.6)] = 2\phi(1.6) - 1$$

$$= 2(0.9452) - 1 = 0.8904$$

③ $p(|X-40| > 5) = 1 - p(|X-40| \le 5)$

$$p(|X-40| > 5) = 1 - p(-5 \le X-40 \le 5)$$

$$p(|X-40| > 5) = 1 - p(35 \le X \le 45)$$

$$p(|X-40| > 5) = 1 - [p(X \le 45) - p(X \le 35)]$$

$$= 1 - \left[p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{45-\mu}{\sigma}\right) - p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} - \frac{35-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

للمعايرة نضع $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ فيكون

$$p(|X-40| > 5) = 1 - [p(Z \le -1) - p(Z \le -3)]$$

بحيث $Z \sim N(0,1)$ فيكون:

$$p(|X-40| > 5) = 1 - [\phi(-1) - \phi(-3)] = 1 - [1 - \phi(1) - (1 - \phi(3))]$$

$$p(|X-40| > 5) = 1 - 1 + \phi(1) + 1 - \phi(3) = 1 + 0.8413 - 0.9987$$

$$= 0.8426$$

تمرين بفرض أن X يدل على أعمار المصابيح الغازية المستخدمة في كلية العلوم ولنفرض أن له التوزيع الطبيعي متوسطه 3500 وانحرافه المعياري 600 ساعة والمطلوب:

1. ما هو احتمال المصابيح التي يجب أن تبدل بعد 3350 ساعة.
2. بعد كم ساعة يجب أن نبدل 0,10 من المصابيح.
3. أوجد الاحتمال $p(3350 \le X \le 3560)$.

الحل لدينا $X \sim N(3500, 600^2)$ أي أن:

$$\mu = E(X) = 3500 \quad , \quad \sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{600^2} = 600$$

1. $$p(X \le 3350) = p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{3350-\mu}{\sigma}\right)$$

للمعايرة نضع $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ حيث $Z \sim N(0,1)$

$$p(X \le 3350) = p\left(Z \le \frac{3350-3500}{60}\right) = p\left(Z \le -\frac{150}{600}\right)$$

$$p(X \le 3350) = \phi(-0.25) = 1 - \phi(0.25) = 1 - 0.5987$$

$$p(X \le 3350) = 0.4013$$

2. بفرض أنه بعد x ساعة نبدل 0.10 من المصابيح.

تنويه "نسبة المصابيح التي تتبدل بعد x ساعة هو نفسه احتمال التبديل"

$$p(X \le x) = 0.10$$

$$p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0.10$$

$$\xRightarrow{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}} p\left(Z \le \frac{x-3500}{600}\right) = 0.10 \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

وبما أن 0.10 ليست موجودة في جدول التوزيع الطبيعي فإن Z_α المقابلة لها ستكون سالبة بمعنى آخر

$$\phi\left(\frac{x-3500}{600}\right) = 0.10 = \phi(Z_\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \phi(Z_\alpha) = 0.10$$

في الجدول لا يوجد قيمة 0.90 لذلك نأخذ متوسط القيمتين الأقرب لها أي:

$$0.8997 < 0.90 < 0.9015$$

$$\Rightarrow \phi(1.28) < \phi(Z_\alpha) < \phi(1.29)$$

$$\Rightarrow Z_\alpha = \frac{1.28 + 1.29}{2} = 1.285$$

وبالتالي:

$$\phi\left(\frac{x-3500}{600}\right)=\phi(-1.285)$$

$$\Rightarrow \frac{x-3500}{600}=-1.285$$

$$\Rightarrow x=600(-1.285)+3500$$

$x = 2729$ ساعة

$\boxed{3}$ $p(3350 \le X \le 3560) = p(X \le 3560) - P(X \le 3350)$

$$p(3350 \le X \le 3560) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{3560-\mu}{\sigma}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{3350-\mu}{\sigma}\right)$$

للمعايرة نضع $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ حيث $Z \sim N(0,1)$ وبالتالي

$$p(3350 \le X \le 3560) = p\left(Z \le \frac{3560-3500}{600}\right) - P\left(Z \le \frac{3350-3500}{600}\right)$$

$$= p(Z \le 0.1) - p(Z \le -0.25)$$

$$= \phi(0.1) - \phi(-0.25)$$

$$= \phi(0.1) - [1-\phi(0.25)]$$

$$= 0.5398 - [1-0.4013] = 0.1385$$

انتهت المحاضرة السادسة